

十二年國民基本教育

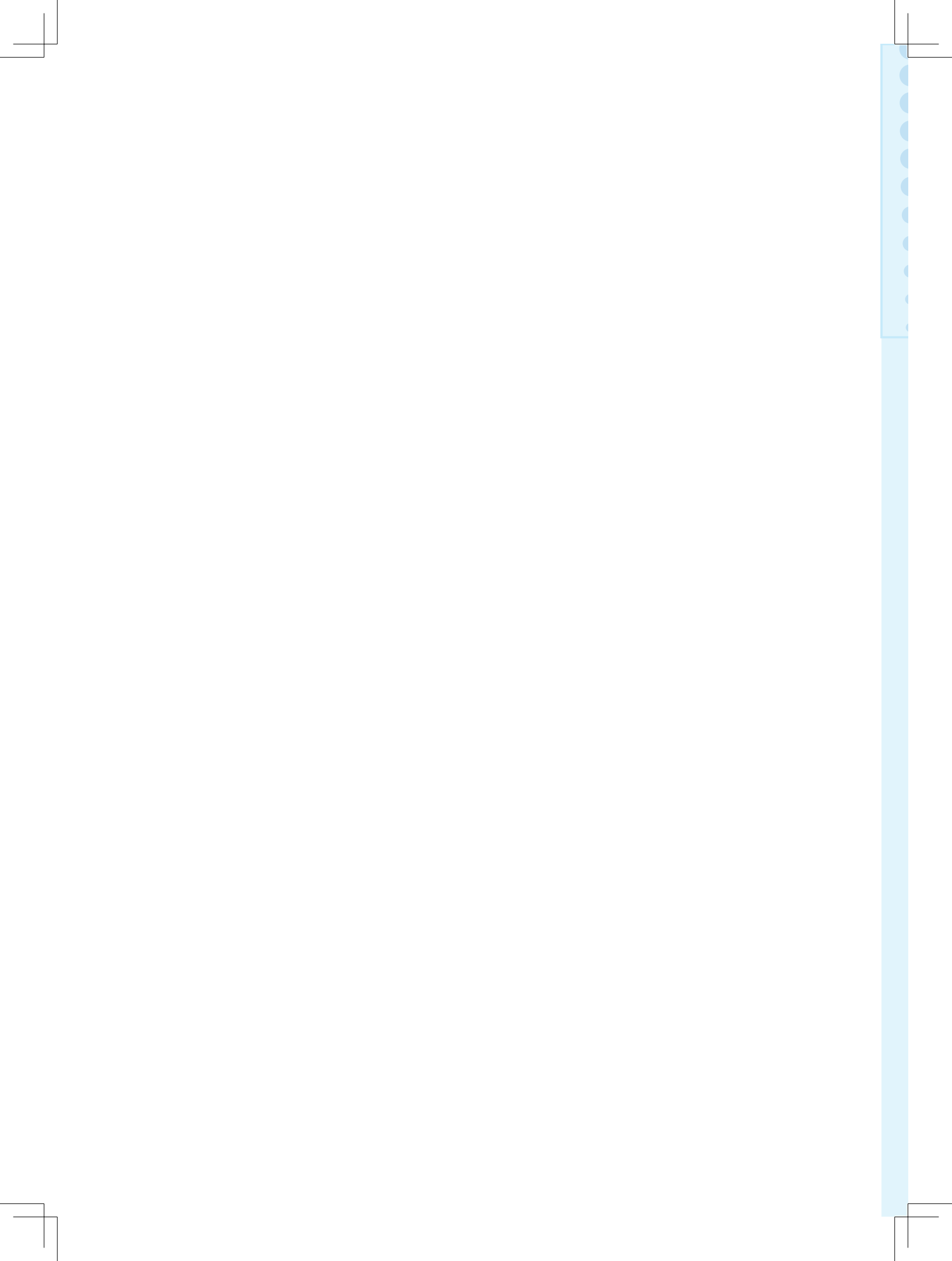
技術型高級中等學校電機與電子群

基本電學

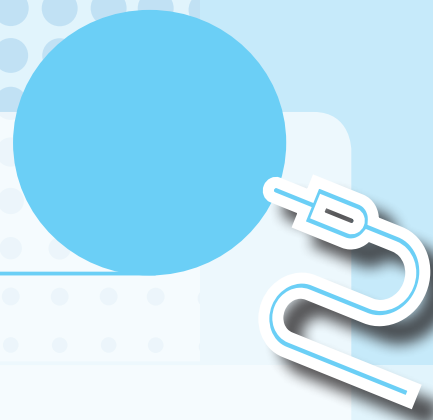
(下冊)

蔡懷文 (健行科技大學電機系助理教授)
洪國勝 編著

泉勝出版有限公司
www.goodbooks.com.tw



編輯大意



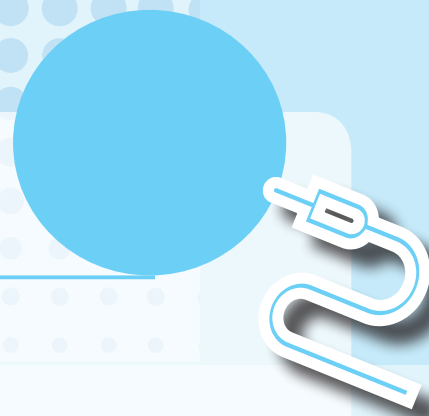
- 一、本書係依據民國 107 年 8 月教育部發布之技術型高級中等學校電機與電子群「基本電學」課程綱要編輯而成。
- 二、本書共含上下冊，供技術型高級中等學校電機與電子群所屬類科等，第一學年第一、二學期三學分教學之用。
- 三、高一學生僅有國中數學基礎，所以基本電學所需數學基礎，本書都會先介紹。但是，一下子要介紹指數函數、三角函數、複數、極座標，也要一面學基本電學，學生老師其實都很吃力，所幸 Python 程式設計已經是國中必修課程，所以本書盡量使用 Python 程式繪出以上數學函數圖形與協助複數的計算，這樣才能快速理解數學公式所代表的物理意義。以上使用電腦輔助學習，完全呼應 108 課綱的跨領域統整教學。
- 五、本書有充分的自我練習、課後習題，這樣學生才能快速理解教材的內容，達到舉一反三的效果。
- 六、本書每章都有素養觀念題，完全呼應 108 課綱的素養導向教學。
- 七、本書於範例、自我練習、習題，盡量取自統測與國營事業歷屆試題，這樣學生學習時，目標明確，很快就能抓到學習重點，且不用再買參考書、不用再補習，希望統測與就業考試都可以考取高分。
- 八、基本電學是很嚴謹的學科，但為配合新世代國中畢業生，本書雖力求嚴謹，但用詞盡量口語化，希望讓學生也能自己閱讀，疏漏之處在所難免，尚祈先進惠予指正。



§ 本書編排體例

1. 直流電以大寫表示。例如， I_1 ， V_2 。
2. 直流暫態與交流電等，會隨著時間變化的物理是以小寫表示。例如， v_r ， i 。
3. 數學方程式均為斜體。例如， $Q_T = V_T \times C_T$ 。
4. 本書的單位都是正體。例如 A、V。
5. 符號的上面加一橫線，表示此為相量。例如， I 為純量， $\bar{I}$ 則為相量。
6. 本書圖編號以節為單位連續編號，例如圖 1-1a、圖 1-1b、圖 1-2a、1-2b。
7. 本書範例以節為單位連續編號，例如範例 3-1a、範例 3-1b，每個範例與自我練習的圖，自成一個單元，使用圖 (1)、圖 (2) 連續編號。

目錄



第7章 直流暫態

※7-1	e 與指數函數.....	7-2
7-2	電阻電容暫態電路.....	7-8
7-3	電阻電感暫態電路.....	7-23
7-4	本章內容摘要	7-33
7-5	課後習題	7-37

第8章 交流電

8-1	電力系統的認識	8-2
※8-2	三角函數	8-6
8-3	波形	8-16
8-4	頻率、週期	8-25
8-5	相位	8-27
8-6	相量運算	8-37
8-7	本章內容摘要	8-56
8-8	課後習題	8-59

第9章 基本交流電路

9-1	交流純電阻、純電容、純電感電路	9-2
9-2	電阻電容、電阻電感及電阻電感電容串聯電路	9-15
9-3	電阻電容、電阻電感及電阻電感電容並聯電路	9-27
9-4	電阻電感電容串並聯電路	9-39
9-5	本章內容摘要	9-46
9-6	課後習題	9-49



第10章 交流電功率

10-1	瞬間功率.....	10-2
10-2	平均功率.....	10-6
10-3	視在功率.....	10-8
10-4	虛功率	10-10
10-5	功率因數.....	10-15
10-6	本章內容摘要	10-18
10-7	課後習題.....	10-20

第11章 諧振電路

11-1	串聯諧振電路.....	11-3
11-2	並聯諧振電路.....	11-15
11-3	串並聯諧振電路.....	11-23
11-4	本章內容摘要	11-27
11-5	課後習題.....	11-28

第12章 交流電源

12-1	單相電源.....	12-2
12-2	三相電源.....	12-7
12-3	電源使用安全	12-24
12-4	本章內容摘要	12-29
12-5	課後習題.....	12-31

附錄1 本書關鍵字中英文對照與索引表

「標示 ※ 符號者，為高一數學課綱，而非基本電學課綱，各校可依學生程度加強。」

Chapter 07

直流暫態



學習目標

- 7-1 e 與指數函數
- 7-2 電阻電容暫態電路
- 7-3 電阻電感暫態電路
- 7-4 本章內容摘要
- 7-5 課後習題

學習綱要

1. 能瞭解 e 的緣由與 $f(x)=e^{-x}$ 圖形。
2. 能夠瞭解與計算電阻電容暫態電路的電壓與電流變化。
3. 能夠瞭解與計算電阻電感暫態電路的電壓與電流變化。

前面我們已經介紹電阻接直流電壓的實驗，我們發現其電壓與電流瞬間就達穩定狀態。但是，電容與電感就不同了，其電壓與電流要達穩定狀態需要一個時間，且此時間與電感、電容、電阻值有關。在電壓還沒穩定之前這段期間的電壓與電流變化狀況，我們稱為暫態 (transient state)，等電壓與電流穩定了，我們稱此為穩態 (steady state)。以下我們分別介紹電容與電感的暫態，但其暫態的描述，都與 e 與指數函數 $y=e^{-x}$ 、 $y=1-e^{-x}$ 有關，所以，以下 7-1 節先介紹 e 與指數函數。

※ 7-1 e 與指數函數

因為本章的實驗結果與 e 與指數函數 $f(x)=e^x$ 有關，所以我們先介紹 e 與指數函數的圖形。

範例 7-1a

說明 $e \cong 2.718$ 的緣由。

說明

工程與科學的指數與對數函數，通常不是以 2 或 10 為底，而是以 e 為底，在此簡單闡述如下：

1. 假設借款金額為一元，年利率為 100%，每年複利一次，則一年後的本利和為 2 元。

$$1 \times (1+1)^1 = 2$$

2. 假設借款金額為一元，年利率為 100%，每月複利一次，則一年後的本利和大約為 2.613。

$$1 \times \left(1 + \frac{1}{12}\right)^{12} \doteq 2.613$$

3. 假設借款金額為一元，年利率為 100%，每日複利一次，則一年後的本利和大約為 2.714。

$$1 \times \left(1 + \frac{1}{365}\right)^{365} \doteq 2.714$$

4. 假設借款金額為一元，年利率為 100%，每秒複利一次，則一年後本利和大約為 2.718。

$$1 \times \left(1 + \frac{1}{365 \times 24 \times 60 \times 60}\right)^{365 \times 24 \times 60 \times 60} = 2.718$$

5. 以上計算，請鍵入以下程式，觀察執行結果。

```
def aa(a):
    m=1*(1+1/a)**(a)
    print(m)
a=1;aa(a)           #2.0
a=12;aa(a)           #2.613
a=365;aa(a)          #2.714
a=365*24*60*60;aa(a) #2.718
```

6. 細菌的繁殖、或電容、電感的充放電等，細菌與電子的數量都非常龐大，這些非常龐大物件的成長現象，都要用 e 來解釋才能理解。也就是數量非常龐大的物件，若其一年「平均」成長 2 倍，則一年後總數量會成長為 2.718 倍，而不是 2 倍。（平均分裂時間為 1 年，表示有些可能 1,2,3 個月就分裂為 2，也有些可能 12,13,14 個月才分裂為 2，那些 1 個月就分裂為 2 的，表示 1 年就成長為 2^{12} 倍，將每個月的成長數量累加、平均，其值接近 2.718，所以以上擁有龐大數量物質一年後的數量平均會是接近 2.718 倍，而不是 2 倍）

指數函數

我們國中已經介紹未知數 x 的一次函數，例如， $f(x)=3x+1$ ；也介紹未知數 x 的二次函數，例如， $f(x)=2x^2-3x+1$ ；也介紹未知數 x 的倒數函數，例如， $f(x)=\frac{1}{x}$ 。現在則要介紹未知數 x 的指數函數，例如， $f(x)=2^x$ ，請留意未知數 x 出現在指數的位置。指數是高一下數學的課程，數學課進度很可能跟不上基電，所以我們把要用的指數運算先介紹如下：

1. 倒數關係：指數的負號代表倒數。例如：

$$2^{-x} = \frac{1}{2^x} \text{ (例如, } 2^{-2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4} \text{)}$$

$$2^{x-y} = \frac{2^x}{2^y} \text{ (例如, } 2^{3-2} = \frac{2^3}{2^2} = 2 \text{)}$$

2. e 為底：數學介紹指數函數都是以 2、3、 $\frac{1}{2}$ 或 $\frac{1}{3}$ 為底，但我們基本電學都是以 e 為底， $e \cong 2.718$ 。例如：

$$e^2 = e \cdot e \div 7.38$$

$$e^{-1} = \frac{1}{e^1} \div 0.368$$

$$e^{-2} = \frac{1}{e^2} \div 0.135$$

以上計算的 Python 程式如下：

```
import math#載入math模組
e=math.e #使用e常數
print (e)#2.718
print(e**2)#7.38
print(e**-1)#0.368
print(e**-2)#0.135
print(e**-3)#0.05
print(e**-4)#0.02
print(e**-5)#0.006看成0
```

範例7-1b

繪製指數函數 $f(x) = e^x$ 圖形。

實習步驟

1. 請鍵入以下程式，觀察指數函數 $f(x) = e^x$ 圖形。

```
import matplotlib.pyplot as plt
#載入繪圖模組
import numpy as np #載入numpy 模組
print(np.e) #輸出e=2.718281828459045
x = np.arange(0, 5, 0.1)
# x為串列，其值從0到5，dx=0.1
y=(np.e)**(x)#計算每一個x對應的y值，y也是串列
plt.plot(x,y)#繪出函數圖形
plt.axhline(y=0)#繪出x軸
plt.axvline(x=0)#繪出y軸
plt.show() #於視窗輸出圖形
```

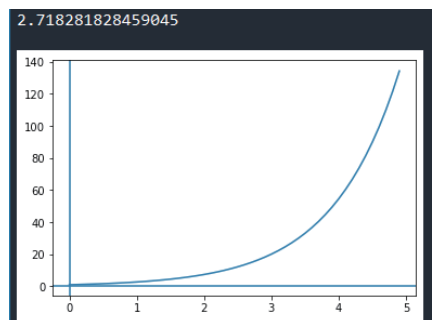


圖 (1) $f(x) = e^x$ 圖

2. 以上程式執行結果，如圖(1)。
3. 圖(1)是 $f(x)=e^x$ 的圖形，但這並非電學所要的，我們電學需要 $f(x)=e^{-x}$ ，指數為負表示整個函數倒數，所以此函數為 $f(x)=1/e^x$ ，以下我們寫程式觀察此函數圖形。

範例7-1c

請寫一程式輸出 $x=0,1,2,3,4,5,6,7$ 的指數函數 $f(x)=e^{-x}$ 值。

實習步驟

1. 請鍵入以下程式，觀察指數函數 $f(x)=e^{-x}$ 的輸出結果。

```
import numpy as np #載入numpy 模組
print(np.e) #輸出e=2.718281828459045
x = np.arange(0, 8, 1)
# x為串列，其值從0到7，dx=1
y=(np.e)**(-x)#計算每一個x對應的y值，y也是串列
for i in range(8):
    print(x[i],end=" ")
    print("{:7.3f}".format(y[i]))#輸出佔七格，小數取3位
```

```
2.718281828459045
0    1.000
1    0.368
2    0.135
3    0.050
4    0.018
5    0.007
6    0.002
7    0.001
```

圖(1) $f(x)=e^{-x}$ 的輸出結果

2. 以上程式執行如圖(1)。
3. 由圖(1)的結果，我們發現 $e^{-1}=\frac{1}{e} \div 0.368$ ， $e^{-2}=\frac{1}{e^2} \div 0.135$ ， $e^{-3} \div 0.05$ ， $e^{-4} \div 0.018 \div 0.02$ ， $x=5$ 之後， e^{-x} 就非常小，我們就說其值趨近於0，這些值要記起來，這樣本章的計算才會快，以上運算將是本章重點。

範例7-1d

寫程式繪出 $x=0,1,2,3,4,5$ 的指數函數 $f(x)=e^{-x}$ 圖形。

實習步驟

1. 請鍵入以下程式，觀察指數函數 $f(x)=e^{-x}$ 圖形。

```
import matplotlib.pyplot as plt
#載入繪圖模組
import numpy as np #載入numpy 模組
print(np.e) #輸出e=2.718281828459045
x = np.arange(0, 8, 0.1)
# x為串列，其值從0到8，dx=0.1
y=(np.e)**(-x)#計算每一個x對應的y值，y也是串列
plt.plot(x,y)#繪出函數圖形
plt.axhline(y=0)#繪出x軸
plt.axvline(x=0)#繪出y軸
plt.show() #於視窗輸出圖形
```

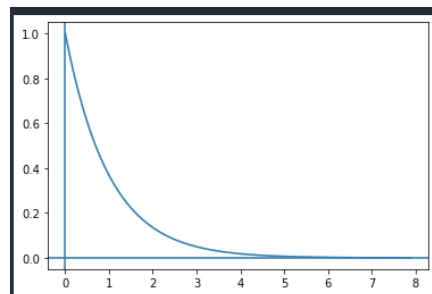


圖 (1)

2. 以上程式執行結果如圖 (1)。由圖 (1)，我們發現指數函數 $f(x) = e^{-x}$ ， x 大於等於 5 以後就趨近 0，此即為本章關鍵重點。

範例7-1e

寫程式輸出 $x = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ 的指數函數 $f(x) = 1 - e^{-x}$ 之值。

實習步驟

1. 請鍵入以下程式，觀察指數函數 $f(x) = 1 - e^{-x}$ 的輸出結果。

```
import numpy as np #載入numpy 模組
print(np.e) #輸出 2.718281828459045
e=np.e
x = np.arange(0, 8, 1)
# x為串列，其值從0到7，dx=1
y=1-e**(-x)#計算每一個x對應的y值，y也是串列
for i in range(8):
    print(x[i],end=" ")
    print(("{:7.3f}").format(y[i]))#輸出佔七格，小數取3位
```

```
2.718281828459045
0  0.000
1  0.632
2  0.865
3  0.950
4  0.982
5  0.993
6  0.998
7  0.999
```

圖 (1) 程式執行結果

2. 以上程式執行結果如圖 (1)，我們發現 $x \geq 5$ 以後，其值接近 1。
3. 以上 $x=1, f(x) \div 0.632; x=2, f(x) \div 0.86; x=3, f(x) \div 0.95; x=4, f(x) \div 0.98; x=5, f(x) \div 0.99$ ，這些值要記起來，這樣本章的計算才會快。

範例7-1f

寫程式繪出 $x = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ 的指數函數 $f(x) = 1 - e^{-x}$ 圖形。

實習步驟

1. 請鍵入以下程式，觀察指數函數 $f(x) = 1 - e^{-x}$ 圖形。

```
import matplotlib.pyplot as plt
#載入繪圖模組
import numpy as np #載入numpy 模組
print(np.e) #輸出e=2.718281828459045
x = np.arange(0, 8, 0.1)
# x為串列，其值從0到8，dx=0.1
y=1-(np.e)**(-x)#計算每一個x對應的y值，y也是串列
plt.plot(x,y)#繪出函數圖形
plt.axhline(y=0)#繪出x軸
plt.axvline(x=0)#繪出y軸
plt.show() #於視窗輸出圖形
```

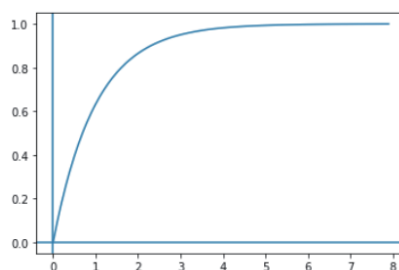


圖 (1) $f(x) = 1 - e^{-x}$ 圖形

2. 以上程式執行結果如圖 (1)。由圖 (1)，我們發現指數函數， x 大於等於 5 以後就趨近 1，此即為本章重點。

自我練習

1. 請將自己從出生到現在，年齡為 x 軸，身高為 y 軸，繪出函數圖，且此一圖形，可以用以下哪一函數來表示呢？
 - (A) $y = 3x + 10$
 - (B) $y = 3x^2 + 10$
 - (C) $y = \frac{1}{3x + 1}$
 - (D) $y = 170(1 - e^{-\frac{x}{5}})$

7-2 電阻電容暫態電路

電阻電容充電暫態

圖 7-2a 稱為電阻電容充電電路，以下簡稱 RC 充電電路。開關 SW 初始狀態位於位置 b ，此時電容器放電完畢，未儲存任何電荷。當 $t=0$ 時，開關 SW 連接 a 點，電源 E 流出的電流 $i(t)$ 經 R 向電容器 C 充電

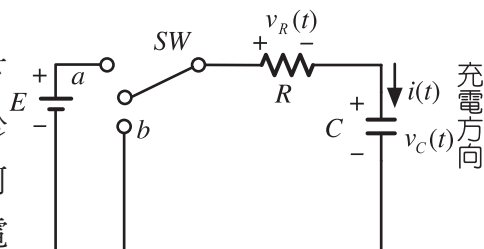
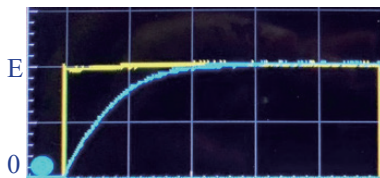
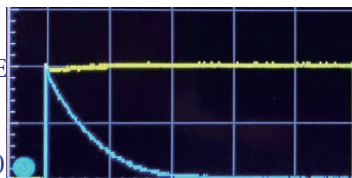
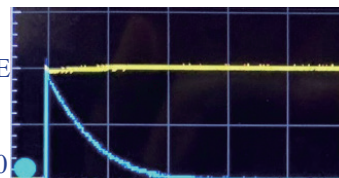


圖 7-2a

(電流是順時針)，電容器兩端電壓 $v_C(t)$ 從 0 隨著時間 t 的增加逐漸增加，如圖 7-2b 的藍色波形，這段時間電壓一直在上升，一直在變化，我們稱為暫態。經過一段時間後，電容器兩端的電壓 $v_C(t)$ 會因電荷被充滿而等於電源電壓 E ，電流為 0，此時電壓與電流都穩定下來，不再變化，我們稱為穩態。以上充電過程中， $v_C(t)$ 、 $v_R(t)$ 、 $i(t)$ 的示波器函數圖形如圖 7-2b、7-2c、7-2d 的黃色波形。

圖 7-2b $v_C(t)$ 黃色是電源，藍色是 $v_C(t)$ 圖 7-2c $v_R(t)$ 黃色是電源，藍色是 $v_R(t)$ 圖 7-2d $i(t)$ 黃色是電源，藍色是 $i(t)$

以上藍色波形與 7-1 節的 $y=e^{-x}$ 、 $y=1-e^{-x}$ 相近，經過科學家不斷實驗，我們發現都與時間 t 、 E 、 R 、 C 有關，且為時間 t 函數，隨著時間 t 的改變而改變，且其值可以由以下方程式表示：

$$v_C(t) = E(1 - e^{-\frac{t}{RC}}) \quad (\text{伏特, V})$$

(公式7-2a)

$$v_R(t) = Ee^{-\frac{t}{RC}} \quad (\text{伏特, V}) \quad \text{or} \quad v_R(t) = E - v_C(t) \quad (\text{伏特, V})$$

(公式7-2b)

$$i(t) = \frac{E}{R} e^{-\frac{t}{RC}} \quad (\text{安培, A}) \quad \text{or} \quad i(t) = v_R(t) / R \quad (\text{安培, A})$$

(公式7-2c)

時間常數

RC 充電電路中，電容器在充電過程電壓是由小變大，電路處在暫態，暫態時間長短是取決於電阻值與電容值乘積的大小，由實驗結果發現，電容電壓充電達到電源電壓所需時間是 $5RC$ ，也就是經過 $5RC$ 時間，電容電壓值穩定下來，達到穩態。因此，我們定義一個時間常數 (time constant，符號為 τ ，讀音 tau)，其公式為：

$$\tau = RC \quad (\text{秒}, s)$$

(公式7-2d)

τ ：時間常數，單位為秒(s)。

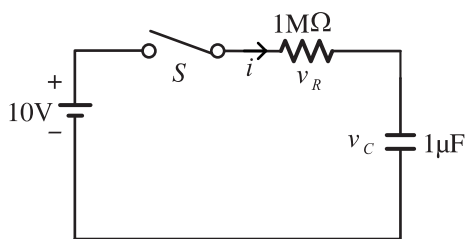
R ：電阻值，單位為歐姆(Ω)。

C ：電容值，單位為法拉(F)。

範例7-2a

圖(1)是一個 RC 充電電路，時間 t 為 0 時，電容未儲存任何電荷。試求

- (1) 此電路時間常數為多少秒？
- (2) 開關閉合瞬間 $t=0$ 時， v_C ， v_R ， i 分別是多少？
- (3) 開關閉合瞬間 $t=1s$ 時， v_C ， v_R ， i 分別是多少？
- (4) 開關閉合瞬間 $t=2s$ 時， v_C ， v_R ， i 分別是多少？
- (5) 開關閉合瞬間 $t=3s$ 時， v_C ， v_R ， i 分別是多少？
- (6) 開關閉合瞬間 $t=4s$ 時， v_C ， v_R ， i 分別是多少？
- (7) 開關閉合瞬間 $t=5s$ 時， v_C ， v_R ， i 分別是多少？
- (8) 繪出 $v_C(t)$ 圖。
- (9) 繪出 $v_R(t)$ 圖。
- (10) 繪出 $i(t)$ 圖。
- (11) 寫程式繪出 $v_C(t)$ 與 $v_R(t)$ 函數圖形。



圖(1)

解

(1) 時間常數；依據公式 7-2d：

$$\tau = RC = 1\text{M} \cdot 1\mu = 1\text{s}$$

(2) 依據公式 7-2a、7-2b：

$$v_C(t) = E(1 - e^{-t/RC}), \quad v_R(t) = E \cdot e^{-t/RC}, \quad i(t) = \frac{E}{R} e^{-t/RC}$$

將 $t=0$ 代入以上公式，得到：

$$v_C(0) = E(1 - 1) = 0\text{V}, \quad v_R(0) = E \cdot e^0 = 10\text{V}, \quad i(0) = \frac{v_R(0)}{1\text{M}} = 10\mu\text{A}$$

(3) $t=1$ ， $t/RC=1$ 表示經過 1 個時間常數，將 $-t/RC$ 使用 -1 代入公式：

$$v_C(1) = 10(1 - e^{-1}) = 10(1 - \frac{1}{e}) = 10(1 - 0.368) \doteq 6.32\text{V}$$

$$v_R(1) = 10e^{-1} \doteq 3.68\text{V} \text{ or } v_R(1) = E - v_C(1) = 10 - 6.32 \doteq 3.68\text{V}, \quad i(1) = \frac{v_R(1)}{1\text{M}} \doteq 3.68\mu\text{A}$$

(4) $t=2$ ， $t/RC=2$ 表示經過 2 個時間常數，將 $-t/RC$ 使用 -2 代入公式：

$$v_C(2) = 10(1 - e^{-2}) = 10(1 - 0.135) \doteq 8.65\text{V}$$

$$v_R(2) = 10e^{-2} \doteq 1.35\text{V} \text{ or } v_R(2) = 10 - 8.65 \doteq 1.35\text{V}, \quad i(2) = \frac{v_R(2)}{1\text{M}} \doteq 1.35\mu\text{A}$$

(5) $v_C(3) = 10(1 - e^{-3}) = 10(1 - 0.05) \doteq 9.5\text{V}$

$$v_R(3) = E - v_C(3) = 10 - 9.5 \doteq 0.5, \quad i(3) = \frac{v_R(3)}{R} = \frac{0.5}{1\text{M}} \doteq 0.5\mu\text{A}$$

(6) $v_C(4) = 10(1 - e^{-4}) = 10(1 - 0.02) \doteq 9.8\text{V}$ (7) $v_C(5) = 10(1 - e^{-5}) = 10(1 - 0) \doteq 10\text{V}$

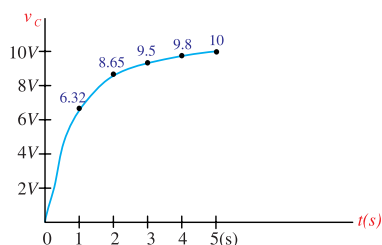
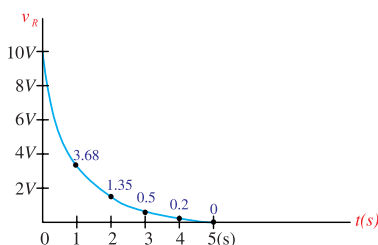
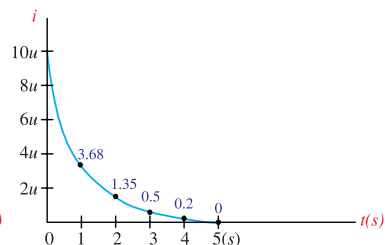
$$v_R(4) = E - v_C(4) \doteq 0.2\text{V}$$

$$v_R(5) = 10 - v_C(5) = 10 - 10 \doteq 0\text{V}$$

$$i(4) = \frac{v_R(4)}{R} = \frac{0.2}{1\text{M}} \doteq 0.2\mu\text{A}$$

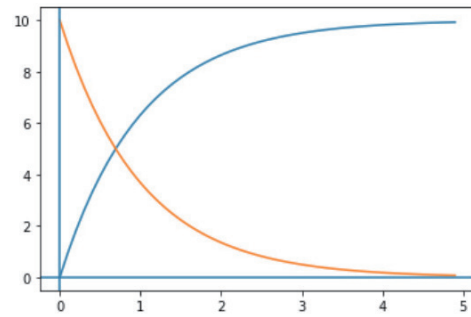
$$i(5) = \frac{v_R(5)}{R} \doteq 0\text{A}$$

(8) $v_C(t)$ 函數圖如圖 (2)。(9) $v_R(t)$ 函數圖如圖 (3)。(10) $i(t)$ 函數圖如圖 (4)。請觀察計算結果，與實驗值（圖 7-2a、圖 7-2b、圖 7-2c）是否接近，驗證公式是否正確。

圖 (2) $v_C(t)$ 函數圖圖 (3) $v_R(t)$ 函數圖圖 (4) $i(t)$ 函數圖

(11) 撰寫程式如下，繪出 $v_C(t)$ 與 $v_R(t)$ 函式圖形。

```
import matplotlib.pyplot as plt
#載入繪圖模組
import numpy as np #載入numpy 模組
e=np.e #e=2.718281828459045
M=1000000;u=0.000001;
E=10;R=1*M;C=1*u;tau=R*C
t = np.arange(0, 5*tau, 0.1)
# t為串列，其值從0到5*tau，dx=0.1
y1=E*(1-e**(-(t/tau))) #vc(t)
y2=E*e**(-(t/tau)) #vr(t)
plt.plot(t,y1)#繪出vc(t)函數圖形，藍色
plt.plot(t,y2)#繪出vr(t)函數圖形，橘紅色
plt.axhline(y=0)#繪出x軸
plt.axvline(x=0)#繪出y軸
plt.show() #於視窗輸出圖形
```



圖(5) 程式執行圖，藍色是 $v_C(t)$ ，橘紅色是 $v_R(t)$

(12) 以上程式，執行結果如圖(5)。

(13) 以上程式可繪出函數圖形，若只要求出指定時間的 v_C 、 v_R 、 i 值，則程式如下：

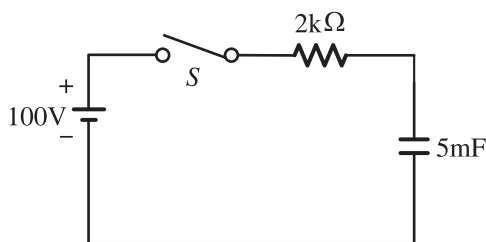
```
import math#載入math模組
e=math.e #使用e常數
M=1000000;u=0.000001
E=10;R=1*M;C=1*u;tau=R*C;t=1 #時間在此調整
vc=E*(1-e**(-(t/tau))) #vc(t)
vr=E*e**(-(t/tau)) #vr(t)
i=vr/R
print("vc=",vc)#6.32
print("vr=",vr)#3.68
print("i=",i)#3.68e-06
```

自我練習

1. 如右圖所示，為一個 RC 充電電路，
 $t=0$ 時，電容器未儲存任何電荷。

試求：

- (1) 此電路的時間常數為多少秒？
- (2) 開關閉合後， $t=0$ ， v_C 、 v_R 及 i 分別是多少？
- (3) 開關閉合後， $t=10s$ ， v_C 、 v_R 及 i 分別是多少？
- (4) 開關閉合後， $t=20s$ ， v_C 、 v_R 及 i 分別是多少？
- (5) 開關閉合後， $t=40s$ ， v_C 、 v_R 及 i 分別是多少？
- (6) 開關閉合後， $t=80s$ ， v_C 、 v_R 及 i 分別是多少？
- (7) 將以上 v_C 、 v_R 、 i 之值給圖。
- (8) 程式繪出 $v_C(t)$ 與 $v_R(t)$ 函數圖形。



2. 電阻與電容串聯電路，電阻為 $2k\Omega$ ，電容為 $25\mu F$ ，此電路的時間常數為何？

統測 112

(A) 12.5ms (B) 25ms (C) 50ms (D) 100ms

3. 電阻 R_1 與電容 C_1 串聯電路，此電路時間常數為 $50ms$ ，電容 C_1 為 $20\mu F$ ，則電阻 R_1 為何？

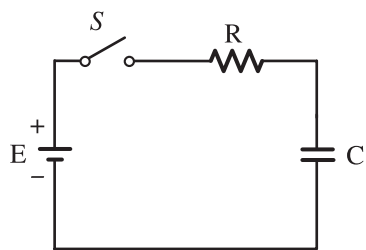
統測 110

(A) 20 kΩ (B) 2.5kΩ (C) 50Ω (D) 2.5Ω

4. 如右圖所示之電路， $E=100V$ ， $R=100k\Omega$ ， $C=50\mu F$ ，當 $t=0$ 時將 S 閉合，該電路的時間常數 τ 為多少？

台北自來水 111

(A) 2.5 秒 (B) 5 秒
 (C) 25 秒 (D) 2.5Ω

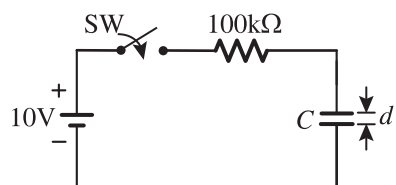


5. 如右圖所示之平行板電容器 C ，已知兩極板之面積為 $10m^2$ ，間距 $d=1mm$ ，介質相對介電係數 $\epsilon_r=100/8.85$

。若此電容器初始儲能為零，則當開關 SW 閉合後 0.1 秒時，電容器兩極板間之電場強度 (V/m) 約為何？ ($e \cong 2.718$)

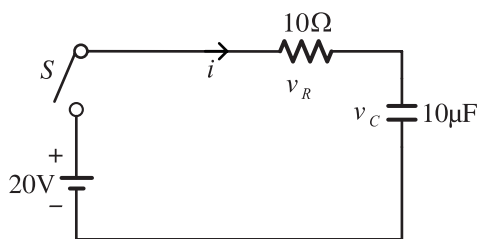
統測 108

(A) 6320 (B) 3680 (C) 2880 (D) 1440



範例7-2b

圖(1)的電路，開關 S 閉合前，電容器未儲存任何電荷，求 S 閉合瞬間($t=0$)， v_C 為何？ v_R 為何？ i 為何？



圖(1)

解

1. 依據公式 7-2a、7-2b、7-2c： 2. $t=0$ 代入以上公式得

$$v_C(t) = E(1 - e^{-\frac{t}{RC}})$$

$$v_C(0) = 20(1 - 1) = 0$$

$$v_R(t) = Ee^{-\frac{t}{RC}}$$

$$v_R(0) = 20V$$

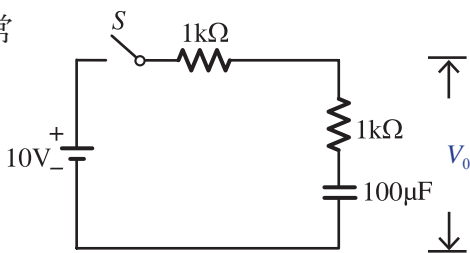
$$i(t) = \frac{E}{R}e^{-\frac{t}{RC}}$$

$$i(0) = \frac{20}{10} = 2A$$

3. 由以上結果可知， S 閉合瞬間，電容端電壓端電壓為 0，視為短路。

自我練習

- 同範例 7-2b，(1) 求充電時間常數？(2) 求多少時間後，電路達穩定？
(3) 電路穩定後， v_C 為多少？ v_R 為多少？ i 為多少？ 統測 107
- 一電阻 R 與一無初始電荷的電容 C 串聯接於直流源電壓 E 之 RC 充電暫態電路，若開始充電的時間是 $t=0$ ，則下列敘述何者錯誤？ 統測 107
 - 在時間 $t=RC$ 時，電容的端電壓約為 $0.368E$
 - 電容兩端的電壓隨時間增加會愈來愈大，穩態時達定值 E
 - 在時間 $t=3RC$ 時，電阻的端電壓約為 $0.05E$
 - 電阻兩端的電壓隨時間增加會愈來愈小，穩態時為零
- 電路如圖(2)，試求(1) 電容充電時間常數？(2) 當開關 S 閉合瞬間， V_0 是多少？
- 電路如圖(3)， RC 電路的时间常數是多少？



圖(2)

5. 電路如圖 (4)， RC 電路的時間常數是多少？

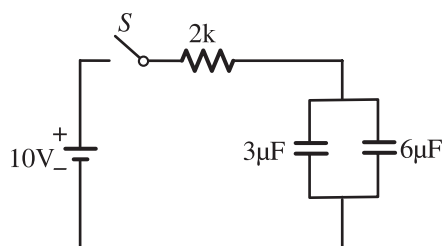


圖 (3)

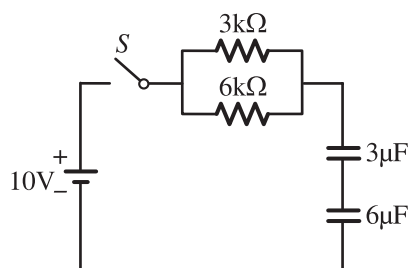


圖 (4)

範例7-2c

如圖 (1) 所示，試求：

- (1) 充電時間常數？
- (2) 開關閉合 0.03 秒後 v_C ？
- (3) 開關閉合 1 秒後 v_C ？

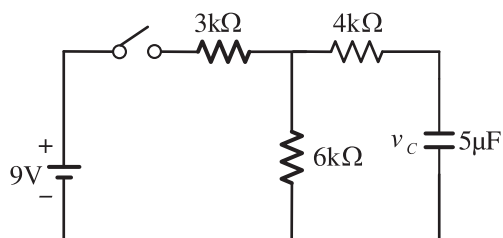


圖 (1)

解

(1) 本例負載是電容器，電路有點複雜，但若先求其戴維寧等效電路，就能得到標準 RC 充電電路，而套用 RC 充電公式。

(a) 負載移開，求負載端看到的等效電阻與等效電壓。

(b) 將電源短路，如圖 (2)，此為戴維寧等效電阻。

$$R_{th} = 4k + (3k // 6k) = 6k\Omega$$

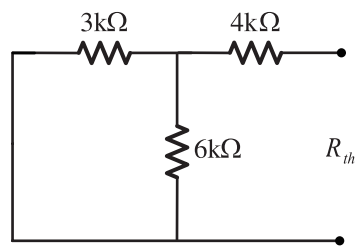


圖 (2)

(c) 負載端的分壓，如圖 (3)，此為戴維寧等效電壓。

$$V_{th} = 9 \left(\frac{6k}{3k + 6k} \right) = 6V$$

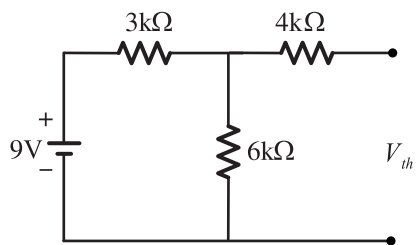


圖 (3)

(2) 等效電路如圖 (4)，此即為標準 RC 充電電路，所以

$$\tau = R \cdot C = 6k \cdot 5\mu = 0.03 \text{ 秒}。$$

(3) 閉合 0.03 秒，為一個時間常數，所以

$$v_C = 6(1 - e^{-1}) = 6(1 - 0.368) = 6 \cdot 0.632 \doteq 3.8V。$$

(4) 1 秒後已超過 5 個時間常數，電容已經充滿電，所以 v_C 等於 6V。

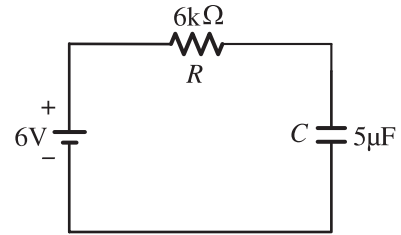
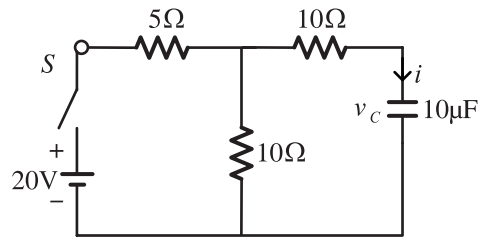


圖 (4)

自我練習

1. 如右圖電路，開關 S 閉合前，電容器未儲存任何電荷，求 S 閉合瞬間 v_C 為何？ i 如何？



範例7-2d

如圖 (1) 所示電容器未儲存任何電荷。

試求：

- (1) S 閉合瞬間 v_C 、 i_1 與 i_2 為何？
(2) 電路穩定後， v_C 、 i_1 、 i_2 為何？

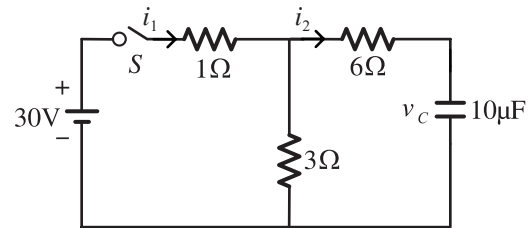


圖 (1)

解

- (1) S 閉合瞬間，電容視為短路 $v_C = 0$ ，等效電路如圖 (2)。

$$i_1 = \frac{30}{1 + (6//3)} = \frac{30}{3} = 10A$$

$$i_2 = 10 \cdot \frac{3}{3+6} = 10 \cdot \frac{3}{9} \doteq 3.3A$$

- (2) 電路穩定後， v_C 充滿電，電容視為開路，如圖 (3)。

$$i_1 = 30 / (1 + 3) = 7.5A$$

$$i_2 = 0$$

$$v_C = 7.5 \times 3 = 22.5V$$

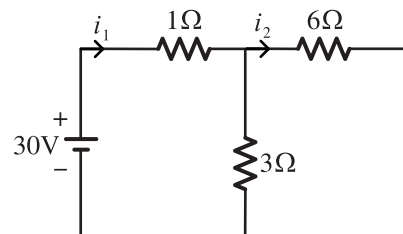


圖 (2)

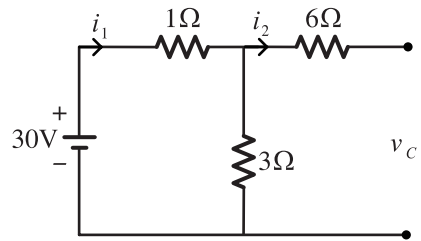


圖 (3)

自我練習

1. 如圖 (4) 所示電路， $t=0$ 秒前電容器電壓為零，若 $t=0$ 秒時將開關 S 閉合，則電容器兩端電壓 $v_C(t)$ 為何？
統測 111

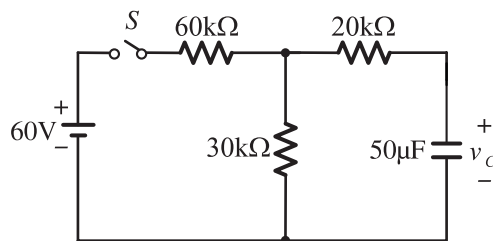


圖 (4)

- (A) $60(1 - e^{-0.5t})$ V (B) $20(1 - e^{-0.5t})$ V (C) $60(1 - e^{-0.05t})$ V (D) $20(1 - e^{-0.05t})$ V
2. 如圖 (5) 所示電路，若開關 S 閉合前，電容器無儲存能量。 S 於時間 $t=0$ 時閉合，則在 S 閉合瞬間 ($t=0$) 和電路穩態 ($t=\infty$)， I 分別為何？
統測 109

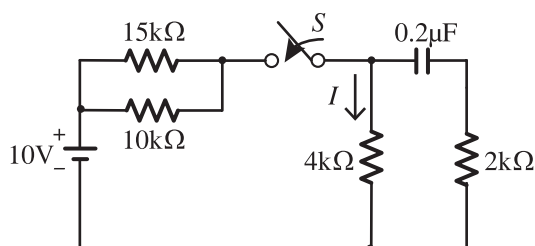


圖 (5)

- (A) 0.46mA, 1mA (B) 1.25mA, 2mA
(C) 1.25mA, 0.46mA (D) 1mA, 1.25mA

RC放電

圖 7-2a 當電容器充滿以後， $v_C(t) = E$ ， $v_R(t) = 0$ ， $i(t) = 0$ ，電路呈現穩定狀態。若此時開關 SW 切換至 b 的位置，如圖 7-2e，電容器開始逆時針放電，電容器兩端的電壓 $v_C(t)$ 隨時間逐漸降低，如圖 7-2f 的藍色波形，科學家經過不斷的實驗，發現也是經過同樣 5

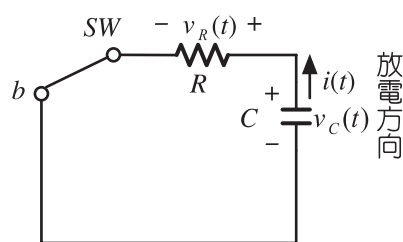
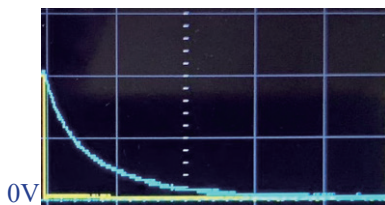
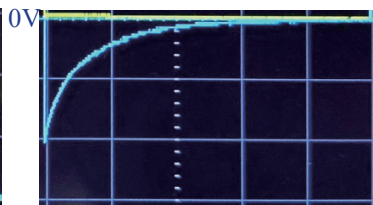


圖 7-2e

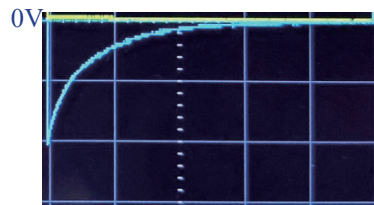
倍的時間常數 τ ($\tau = RC$) 後， $v_C(t)$ 、 $v_R(t)$ 、 $i(t)$ 逐漸降為 0。以上放電過程中， $v_C(t)$ 、 $v_R(t)$ 、 $i(t)$ 的示波器函數圖形如圖 7-2f、7-2g、7-2h 的藍色波形，請留意 $v_R(t)$ 、 $i(t)$ 都是由負到 0，這代表放電的方向與充電時相反。

圖 7-2f $v_C(t)$

黃色是電源，藍色是 $v_C(t)$

圖 7-2g $v_R(t)$

黃色是電源，藍色是 $v_R(t)$

圖 7-2h $i(t)$

黃色是電源，藍色是 $i(t)$

以上藍色波形與 7-1 節的 $y=e^{-x}$ 與 $y=1-e^{-x}$ 相近，經過科學家不斷實驗，發現都與時間 t 、 E 、 R 、 C 有關，且為時間 t 函數，隨著時間 t 的改變而改變，其值如下：

$$v_C(t) = Ee^{-\frac{t}{RC}} \quad (\text{伏特, V}) \quad (\text{公式7-2e})$$

$$v_R(t) = -Ee^{-\frac{t}{RC}} \quad (\text{伏特, V}) \quad \text{or} \quad v_R(t) = -v_C(t) \quad (\text{伏特, V})$$

(負號表示與原充電電壓 (公式7-2b) 極性相反) (公式7-2f)

$$i(t) = -\frac{E}{R}e^{-\frac{t}{RC}} \quad (\text{安培, A}) \quad \text{or} \quad i(t) = v_R(t) / R \quad (\text{安培, A})$$

(負號表示與原充電電流 (公式7-2c) 方向相反) (公式7-2g)

RC放電時間常數

電容放電時間與電容充電時間相同，一樣是需要 $5RC$ 的時間，才能放電完畢，電壓歸零，所以一樣定義一個電容放電時間常數為：

$$\tau = RC \quad (\text{秒, s}) \quad (\text{公式7-2h})$$

也是配合 e 常數，剛好是電容放電剩下 36.8% 為 1 個時間常數。

範例7-2e

RC 放電電路如圖7-2a， $E=10\text{V}$ ， $R=2\text{k}$ ， $C=1\text{mF}$ ，當電容充滿電後，開關 SW 於 $t=0$ 時切換到位置 b 。試求：

- (1) 放電時間常數 τ ?
- (2) 放電方向 ?
- (3) $t=2\text{s}$ 的 v_C 、 v_R 、 i ?
- (4) $t=4\text{s}$ 的 v_C 、 v_R 、 i ?
- (5) $t=6\text{s}$ 的 v_C 、 v_R 、 i ?
- (6) $t=8\text{s}$ 的 v_C 、 v_R 、 i ?
- (7) $t=10\text{s}$ 的 v_C 、 v_R 、 i ?
- (8) 撰寫程式繪出 $v_C(t)$ 與 $v_R(t)$ 。

解

- (1) 依據公式 7-2h，放電時間常數 $\tau = R \cdot C = 2\text{k} \cdot 1\text{m} = 2\text{s}$ 。
- (2) 放電方向為從 C 流向 R ，與充電方向相反，所以 v_R 與 i 的標示要加上負號。

(3) 依據公式 7-2e、7-2f、7-2g， $\tau=2$ ， $t=2$ 時，表示經過一個時間常數，所以 $-t/RC$ 以 -1 代入。

$$v_C = v_C(2) = E \cdot e^{-2/2} = 10 \cdot e^{-1} \doteq 3.68V$$

$$v_R = v_R(2) = -E \cdot e^{-2/2} = -v_C \doteq -3.68V \text{ (負號表示與原充電方向相反)}$$

$$i = i(2) = -\frac{E}{R} e^{-2/2} = -\frac{3.68}{2k} \doteq -1.84mA \text{ (負號表示與原充電方向相反)}$$

(4) $t=4$ ，表示經過2個時間常數。

$$v_C = v_C(4) = E \cdot e^{-4/2} = 10 \cdot e^{-2} \doteq 1.35V$$

$$v_R = -v_C \doteq -1.35V$$

$$i = v_R / R = -1.35 / 2k \doteq -0.67mA$$

(6) $t=8$ ，表示經過4個時間常數。

$$v_C = v_C(8) = 10 \cdot e^{-4} \doteq 0.2V$$

$$v_R = -v_C \doteq -0.2V$$

$$i = v_R / R = -0.2 / 2k \doteq -0.1mA$$

(5) $t=6$ ，表示經過3個時間常數。

$$v_C = v_C(6) = 10 \cdot e^{-3} \doteq 0.5V$$

$$v_R = -v_C \doteq -0.5V$$

$$i = v_R / R = -0.5 / 2k \doteq -0.25mA$$

(7) $t=10$ ，表示經過 5 個時間常數。

$$v_C = v_C(10) = 10 \cdot e^{-5} \doteq 0V$$

$$v_R \doteq 0V$$

$$i \doteq 0mA$$

(8) 將以上結果繪圖。 $v_C(t)$ 如圖 (1)， $v_R(t)$ 如圖 (2)， $i(t)$ 如圖 (3)。

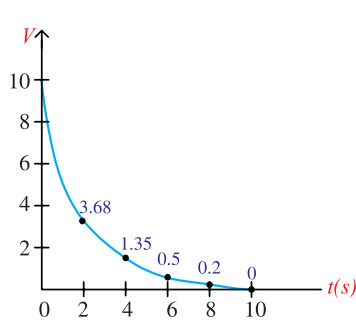


圖 (1) $v_C(t)$ 函數圖

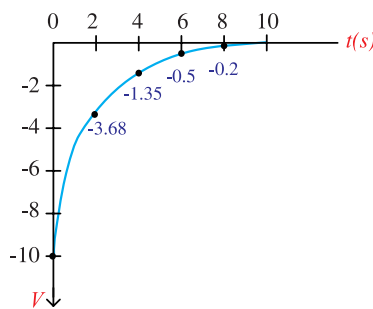


圖 (2) $v_R(t)$ 函數圖

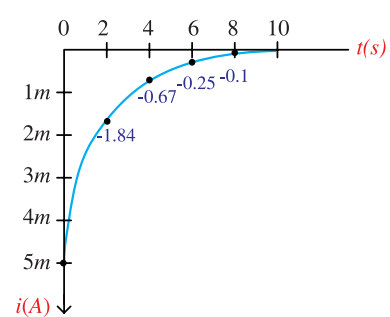


圖 (3) $i(t)$ 函數圖

(9) 撰寫程式如下，可繪出 $v_C(t)$ 與 $v_R(t)$ 函數圖。

```
import matplotlib.pyplot as plt
#載入繪圖模組
import numpy as np #載入numpy 模組
e=np.e #e=2.718281828459045
k=1000;m=0.001
E=10;R=2*k;C=1*m;tau=R*C
t = np.arange(0, 5*tau, 0.1)
```

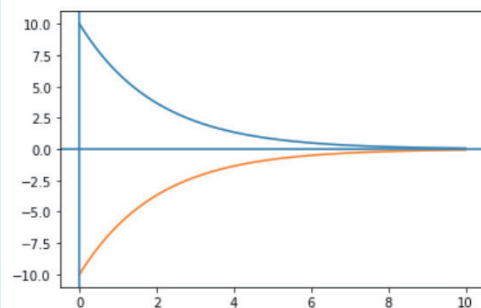


圖 (4) 藍色是 $v_C(t)$ ，橘紅色是 $v_R(t)$

```
# t為串列，其值從0到5*tau，dx=0.1
y1=E*e**(-(t/tau)) #vc(t)
y2=-E*e**(-(t/tau)) #vr(t)
plt.plot(t,y1)#繪出vc(t)函數圖形，藍色
plt.plot(t,y2)#繪出vr(t)函數圖形，橘紅色
plt.axhline(y=0)#繪出x軸
plt.axvline(x=0)#繪出y軸
plt.show() #於視窗輸出圖形
```

(10) 執行結果如圖 (4)。

(11) 以上程式可繪出函數圖形，若只要求出指定時間的 v_C 、 v_R 、 i 值，則程式如下：

```
import math#載入math模組
e=math.e #使用e常數
k=1000;m=0.001
E=10;R=2*k;C=1*m;tau=R*C
t=2 #時間在此調整
vc=E*e**(-(t/tau)) #vc(t)
vr=-E*e**(-(t/tau)) #vr(t)
i=vr/R
print("vc=",vc)#3.68
print("vr=",vr)#-3.68
print("i=",i)#-0.00184
```

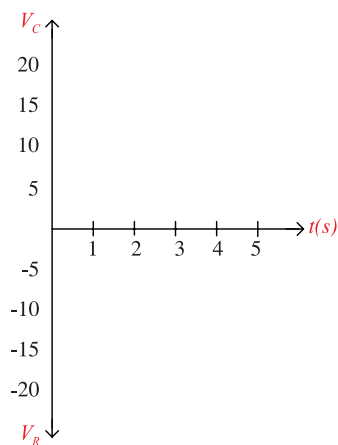
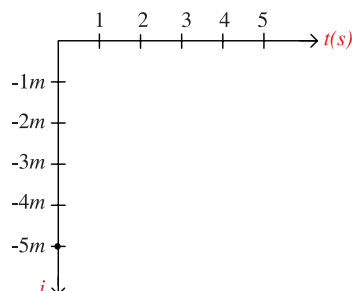
(12) RC 充放電都是先求 v_C ，次求 v_R ，最後 i 為 v_R/R 。

(13) 請同學要多繪圖，才能將結果透過圖像牢牢記住，將稱為圖像記憶法。

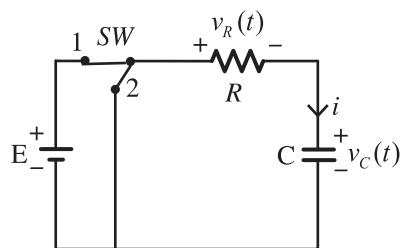
(14) RC 暫態電路都是先求 v_C ，接著求 v_R ，充電 v_R 是 $E - v_C$ ，放電 v_R 是 $-v_C$ ， i 則一定是 v_R/R 。

自我練習

1. RC 放電電路如圖 7-2a 電路已達穩定， $E = 20V$ ， $R = 4\text{ k}\Omega$ ， $C = 0.5\text{ mF}$ ，將 SW 撥至 b。試求：
 - (1) 放電時間常數。
 - (2) 分別求 $t = 2, 4, 6, 8, 10\text{ s}$ 的 v_C 、 v_R 及 i 。
 - (3) 將 (2) 之結果以時間為 x 軸，電壓與電流為 y 軸，繪出圖形。

圖 (1) $v_C(t)$ 與 $v_R(t)$ 圖 (2) $i(t)$

- (4) 寫程式繪出 $v_C(t)$ 與 $v_R(t)$ 函數圖。
2. 如右圖所示之電路，電路之時間常數為 τ ，若電容之初值電壓為零，在 $t=0$ 時將 SW 切入位置 1，並在 $t=5\tau$ 時，再將開關 SW 切回位置 2。則 $t=0$ 之後 $v_R(\tau) + v_C(\tau) + v_R(6\tau) + v_C(6\tau)$ 之值為何？
- (A) E (B) $0.5E$ (C) $0.368E$ (D) $0.144E$



範例 7-2f

如圖 (1)， $t=0$ ， S 閉合，試求：

- (1) 充電時間常數？
- (2) 充電 8 秒 v_C 與 i_C 之值？
- (3) $t=25$ 秒時 S 打開，求放電時間常數？
- (4) $t=31$ 秒時 v_C 與 i_C 之值？

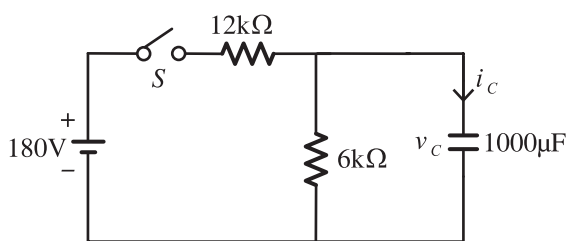


圖 (1)

解

- (1) 將電容器當作負載，求其戴維寧等效電路。
- (a) 負載移開，求從負載端看到的等效電阻與等效電壓。

(b) 電源短路，如圖 (2)，此為戴維寧等效電阻

$$R_{th} = 12k // 6k = 4k\Omega$$

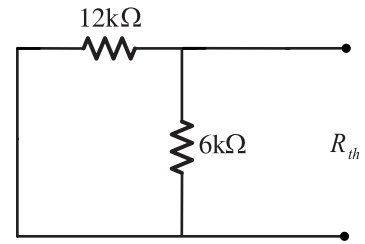


圖 (2)

(c) 負載端的分壓為 V_{th} ，如圖 (3)，

$$V_{th} = \frac{180}{12k + 6k} \cdot 6k = 60V$$

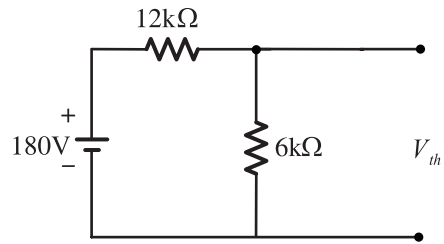


圖 (3)

(2) 等效電路如圖 (4) 此即為標準 RC 充放電電路，即可套用現成充放電公式，

$$\tau = 4k \cdot 1000\mu = 4s$$

(3) 充電 8 秒為 2 個時間常數。

$$v_C = 60(1 - e^{-2}) \doteq 52V$$

$$v_R = 60 - 52 = 8V$$

$$i_C = 8 / 4k = 2mA$$

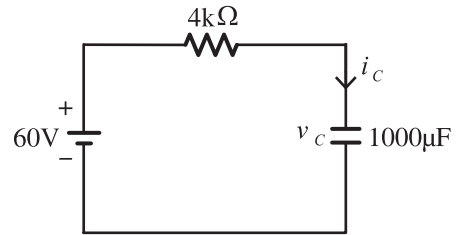


圖 (4)

(4) S 打開，放電電路如圖 (5)

$$\tau = R \cdot C = 6k \cdot 1000\mu \doteq 6s$$

(5) $t = 31$ 秒，表示放電 6 秒，6 秒為一個時間常數。

$$V_C = 60 \cdot e^{-1} = 60 \cdot 0.368 \doteq 22V$$

$$v_R \doteq -22V \text{ (負號表示與充電方向相反)}$$

$$i_C = \frac{-22}{6k} \doteq -3.6mA \text{ (負號表示與充電方向相反)}$$

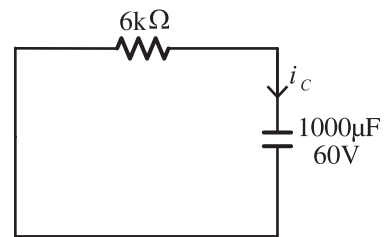


圖 (5)

自我練習

1. 如圖 (6) 所示電路，開關 S 已經閉合一段時間，電路已達穩定。若在 $t=0$ 秒時將開關打開，此時線路電流 $I=?$

自來水 110

- (A) 0.2mA (B) 0A
(C) 2mA (D) 2.5mA

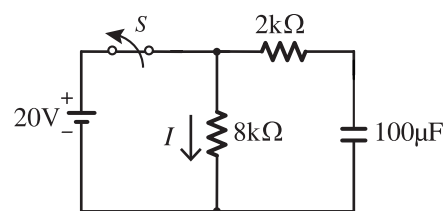


圖 (6)

7-3 電阻電感暫態電路

電阻電感充電暫態

圖 7-3a 稱為電阻電感充電電路，以下簡稱 RL 充電電路。開關 SW 初始狀態位於位置 b ，此時電感器放電完畢，未儲存任何電荷。當 $t=0$ 時，開關 SW 連接 a 點，電源 E 流出的電流，先經過電阻 R ，

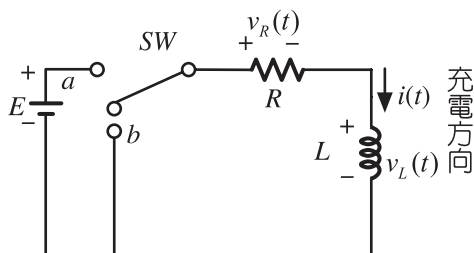
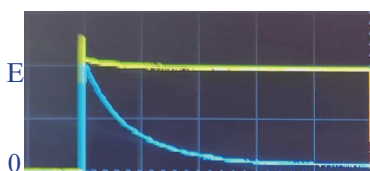
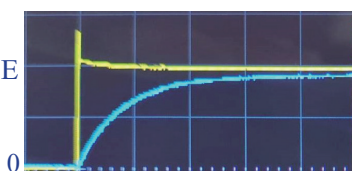
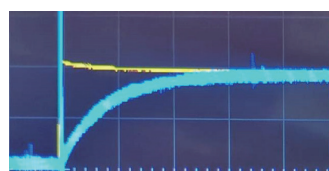


圖 7-3a

再向電感器 L 充電，電感器兩端瞬間感應一個電動勢 E ，如圖 7-3b 的藍色波形，來抵抗電流的增加，此稱為楞次定律。但此電壓 E ，隨著時間的增加逐漸降低，這段時間電壓一直在下降，一直在變化，我們稱為暫態。經過一段時間後，電感器兩端的電壓逐漸降為 0，電壓穩定下來，不再變化，我們稱為穩態。此時，電流為 E/R ，順時針。以上充電過程中， $v_L(t)$ 、 $v_R(t)$ 、 $i(t)$ 的示波器函數圖形如圖 7-3b、7-3c、7-3d 的藍色波形（圖中的異常突波為空間中的雜訊，線段不連續與示波器的取樣頻率有關）。

圖 7-3b $v_L(t)$ 黃色是電源，藍色是 $v_L(t)$ 圖 7-3c $v_R(t)$ 黃色是電源，藍色是 $v_R(t)$ 圖 7-3d $i(t)$ 黃色是電源，藍色是 $i(t)$

以上藍色波形與 7-1 節 $y=e^{-x}$ 與 $y=1-e^{-x}$ 相近，經過科學家不斷實驗，我們發現都與時間 t 、 E 、 R 、 L 有關，且為時間 t 函數，隨著時間的改變而改變，且其值可由以下方程式表示：

$$v_L(t) = Ee^{-\frac{t}{L/R}} \quad (\text{伏特, V})$$

(公式7-3a)

$$v_R(t) = E(1 - e^{-\frac{t}{L/R}}) \quad (\text{伏特, V}) \quad \text{or} \quad v_R(t) = E - v_L(t) \quad (\text{伏特, V})$$

(公式7-3b)

$$i(t) = \frac{E}{R}(1 - e^{-\frac{t}{L/R}}) \quad (\text{安培, A}) \quad \text{or} \quad i(t) = v_R(t) / R \quad (\text{安培, A})$$

(公式7-3c)

時間常數

RL 充電電路中，開關接觸接點 a，電感器瞬間感應一個反電動勢，以抵抗電流的增加。然後此電壓逐漸降低，電路處於暫態，暫態時間長短是取決於電感值與電阻值比值的大小，其值經由實驗證明是 $5 \left(\frac{L}{R} \right)$ 。因此，我們定義一個時間常數 (time constant)，符號為 τ ，其公式為：

$$\tau = \frac{L}{R} \text{ (秒, s)}$$

(公式7-3d)

τ ：時間常數，單位為秒(s)。

R ：電阻值，單位為歐姆(Ω)。

L ：電感值，單位為亨利(H)。

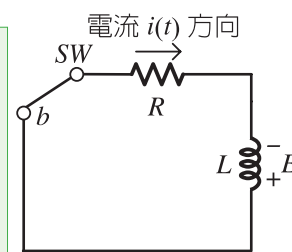


圖 7-3e RL 放電

RL放電

圖 7-3a 當電感器充滿以後，電感電壓為 0，電路呈現穩定狀態，此時電流為 E / R ，方向為順時針。若此時開關 SW 切換至 b 的位置，如圖 7-3e，電感器瞬間感應一個反向電壓 E（下面正，上面負），如圖 7-3f 的藍色波形，以能讓電流持續再順時針流動一下（電感就是電流來了，反抗一下，電流沒了，彌補一下，都是在維持現狀，此即為楞次定律）。但是此電動勢會隨時間的改變而逐漸降低，科學家經過不斷的實驗，發現也是經過同樣 5 個時間常數 ($\tau = \frac{L}{R}$) 後，逐漸降為 0。以上放電過程中， $v_L(t)$ 、 $v_R(t)$ 、 $i(t)$ 的示波器函數圖形如圖 7-3f、7-3g、7-3h 的藍色波形。

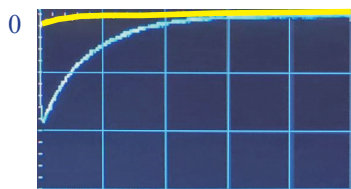


圖 7-3f $v_L(t)$

黃色是電源，藍色是 $v_L(t)$

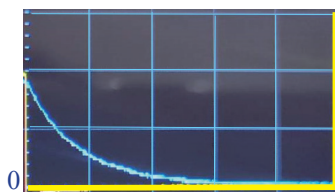


圖 7-3g $v_R(t)$

黃色是電源，藍色是 $v_R(t)$

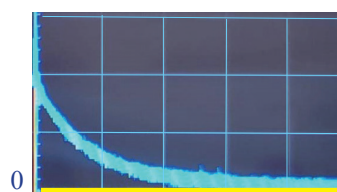


圖 7-3h $i(t)$

黃色是電源，藍色是 $i(t)$

以上藍色波形與 7-1 節 $y=e^{-x}$ 與 $y=1-e^{-x}$ 相近，經過科學家不斷實驗，發現都與時間 t 、 E 、 R 、 L 有關，且為時間 t 函數，隨著時間 t 的改變而改變，其值可由方程式表示如下：

$$v_L(t) = -Ee^{-\frac{t}{L/R}} \quad (\text{伏特, V})$$

(負號表示與原充電電壓 (公式7-3a) 極性相反)

(公式7-3e)

$$v_R(t) = Ee^{-\frac{t}{L/R}} \quad (\text{伏特, V}) \quad \text{or} \quad v_R(t) = -v_L(t) \quad (\text{伏特, V})$$

(公式7-3f)

$$i(t) = \frac{E}{R}e^{-\frac{t}{L/R}} \quad (\text{安培, A}) \quad \text{or} \quad i(t) = v_R(t) / R \quad (\text{安培, A})$$

(公式7-3g)

RL放電時間常數

電感放電時間與充電時間相同，所以一樣定義一個電感放電時間常數 τ 為：

$$\tau = \frac{L}{R} \quad (\text{秒, s})$$

(公式7-3g)

也是配合 e 常數，剛好是電感放電剩下 36.8% 為 1 個時間常數。

範例7-3a

電阻與電感串聯電路如圖 (1)，電感無任何電荷， $t=0\text{s}$ 時， S 接通 a 點求：

- (1) 充電時間常數 τ 為何？
- (2) $t=0\text{s}$ 時 v_L 、 v_R 、 i 分別為何？
- (3) $t=1\text{ }\mu\text{s}$ 時 v_L 、 v_R 、 i 分別為何？
- (4) $t=2\text{ }\mu\text{s}$ 時 v_L 、 v_R 、 i 分別為何？
- (5) $t=3\text{ }\mu\text{s}$ 時 v_L 、 v_R 、 i 分別為何？
- (6) $t=4\text{ }\mu\text{s}$ 時 v_L 、 v_R 、 i 分別為何？
- (7) $t=5\text{ }\mu\text{s}$ 時 v_L 、 v_R 、 i 分別為何？
- (8) 依照以上數據繪出 $v_L(t)$ 、 $v_R(t)$ 的函數圖形。
- (9) 依照課本公式，寫程式繪出 $v_L(t)$ 與 $v_R(t)$ 函數圖形。

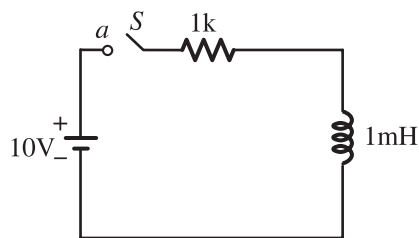


圖 (1)

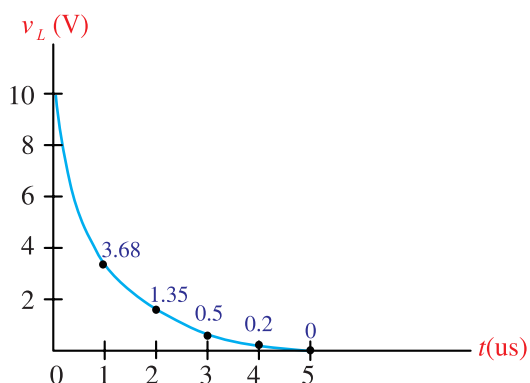
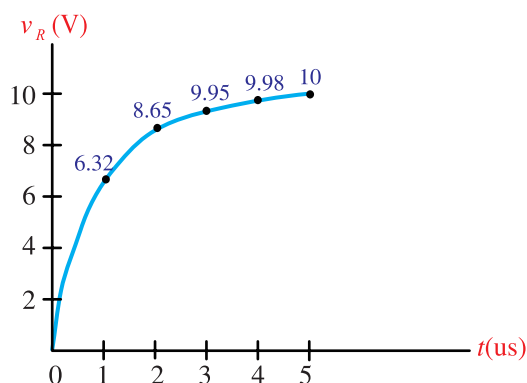
解

- (1) 電阻電感串聯充電時間常數 $\tau = \frac{L}{R} = \frac{1\text{m}}{1\text{k}} = 1\mu\text{s}$ 。(充放電題目，都是先算出時間常數)

$$v_L(t) = Ee^{-\frac{t}{L/R}} (\text{V}), v_R(t) = E(1 - e^{-\frac{t}{L/R}}) (\text{V}), i(t) = \frac{E}{R}(1 - e^{-\frac{t}{L/R}}) (\text{A})$$

(電感充電瞬間，電感瞬間感應 10V 來反抗電流的變化，讓電流維持現狀)

- (2) $t=0\text{s}$, $v_L(0)=E=10\text{V}$, $v_R(0)=0\text{V}$, $i(0)=0\text{A}$
 (3) $t=1\mu\text{s}$, 代表歷經一個時間常數, $-t/(L/R)$ 以 -1 代入 $v_L(1)=10 \times e^{-1} \doteq 3.68\text{V}$,
 $v_R(1)=10 - V_L(1) \doteq 6.32\text{V}$, $i(1)=v_R(1)/R \doteq 6.32\text{mA}$
 (4) $t=2\mu\text{s}$, 代表歷經二個時間常數, $-t/(L/R)$ 以 -2 代入 $v_L(2)=10 \times e^{-2} \doteq 1.35\text{V}$,
 $v_R(2)=10 - V_L(2) \doteq 8.65\text{V}$, $i(2)=v_R(2)/R \doteq 8.65\text{mA}$
 (5) $t=3\mu\text{s}$, $v_L(3) \doteq 0.5\text{V}$, $v_R(3) \doteq 9.5\text{V}$, $i(3) \doteq 9.5\text{mA}$
 (6) $t=4\mu\text{s}$, $v_L(4) \doteq 0.2\text{V}$, $v_R(4) \doteq 9.8\text{V}$, $i(4) \doteq 9.8\text{mA}$
 (7) $t=5\mu\text{s}$, $v_L(5) \doteq 0\text{V}$, $v_R(5) \doteq 10\text{V}$, $i(5) \doteq 10\text{mA}$
 (8) $v_L(t)$ 函數如圖 (2), $v_R(t)$ 函數如圖 (3)。

圖 (2) $v_L(t)$ 函數圖圖 (3) $v_R(t)$ 函數圖

- (9) 撰寫 Python 程式如下，繪出 $v_L(t)$ 與 $v_R(t)$ 函數圖形。

```
import matplotlib.pyplot as plt
#載入繪圖模組
import numpy as np #載入numpy 模組
k=1000;m=0.001
E=10;R=1*k;L=1*m
tau=L/R
t = np.arange(0, 5*tau, tau/10)
```

```
# t為串列，其值從0到5*tau，dt=0.1tau
y1=E*(np.e)**(-t/tau)#計算每一個x對應的y
值，y也是串列
y2=E*(1-(np.e)**(-t/tau))
plt.plot(t,y1)#繪出vL函數圖形
plt.plot(t,y2)#繪出vR函數圖形
plt.axhline(y=0)#繪出x軸
plt.axvline(x=0)#繪出y軸
plt.show() #於視窗輸出圖形
```

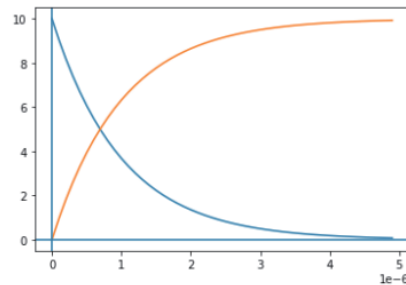


圖 (4) $v_L(t)$ 與 $v_R(t)$ 函數圖，藍色是 $v_L(t)$ ，橘色是 $v_R(t)$

(10) 以上程式可繪出函數圖形，若只要求出指定時間的 v_L 、 v_R 、 i 值，則程式如下：

```
import math#載入math模組
e=math.e #使用e常數
k=1000;m=0.001;u=0.000001
E=10;R=1*k;L=1*m;tau=L/R
t=1*u #時間在此調整
vl=E*e**(-(t/tau)) #vc(t)
vr=E*(1-e**(-(t/tau))) #vL(t)
i=vr/R
print("vl=",vl)#3.68
print("vr=",vr)#6.32
print("i=",i)#0.00632
```

自我練習

- 同範例 7-3a，SW 於 a 點時，電路達穩定狀態，但 E 改為 20V， R 改為 $2k\Omega$ ， L 改為 10mH， $t=0$ 將 SW 撥向 b 點。
 - 試計算放電時間常數。
 - 分別計算 1,2,3,4,5 個時間常數的 v_L 、 v_R 與 i ，填入下表。
 - 依照以上數據，繪出 $v_L(t)$ 與 $v_R(t)$ 函數圖。

$\tau =$ s	電感電壓 v_L	電阻電壓 v_R	電阻電流 i
$t=1\tau =$ ___s			
$t=2\tau =$ ___s			
$t=3\tau =$ ___s			
$t=4\tau =$ ___s			
$t=5\tau =$ ___s			

2. 如下頁圖 (5) 所示之暫態電路及電流 $i_L(t)$ 時間響應圖，電流 $I_S=10\text{A}$ ，時間常數 τ 為 0.02 秒。已知電阻 $R_S=2\Omega$ ，且電感在開關 S_1 閉合前無儲存能量，當時間為零時 ($t=0$ 秒) 開關 S_1 閉合 (導通)，則此電路的直流電壓源 E_S 與電感 L_S 分別為何？ 統測 112

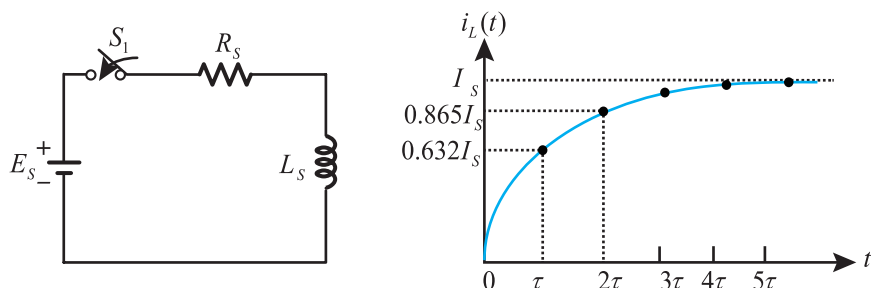


圖 (5)

- (A) $E_S=20\text{V}$ 、 $L_S=40\text{mH}$ (B) $E_S=10\text{V}$ 、 $L_S=30\text{mH}$
 (C) $E_S=20\text{V}$ 、 $L_S=20\text{mH}$ (D) $E_S=10\text{V}$ 、 $L_S=10\text{mH}$
3. 如圖 (6) 所示電路， $t=0$ 秒前電感器儲存能量為零，若 $t=0$ 秒時將開關 S 由位置 1 切至位置 2，則下列敘述何者正確？

統測 111

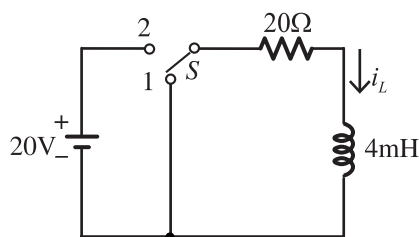


圖 (6)

- (A) 流經電感器的初始電流值為 1A 且電路時間常數為 80ms
 (B) 流經電感器的初始電流值為 0A 且電路時間常數為 80ms
 (C) 流經電感器的初始電流值為 1A 且電路時間常數為 0.2ms
 (D) 流經電感器的初始電流值為 0A 且電路時間常數為 0.2ms

範例7-3b

RL 串聯電路如圖 (1)， $t<0$ 時，開關置於 a ，電路已達穩態， $t=0$ 時開關 S 置於 b 。求：

- (1) 放電時間常數 $\tau = ?$
- (2) $t<0$ ， v_L 、 v_R 、 i 分別是多少？
- (3) $t=0$ ， v_L 、 v_R 、 i 分別是多少？
- (4) $t=2\text{s}$ ， v_L 、 v_R 、 i 分別是多少？
- (5) $t=4\text{s}$ ， v_L 、 v_R 、 i 分別是多少？

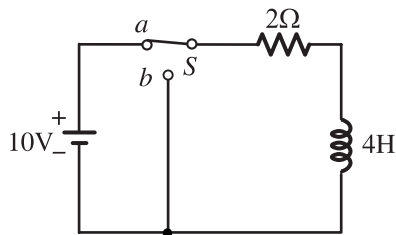


圖 (1)

- (6) $t=6\text{s}$ ， v_L 、 v_R 、 i 分別是多少？
 (7) $t=8\text{s}$ ， v_L 、 v_R 、 i 分別是多少？
 (8) $t=10\text{s}$ ， v_L 、 v_R 、 i 分別是多少？
 (9) 依照以上數據繪出 $v_L(t)$ 與 $v_R(t)$ 函數圖。

解

- (1) 放電時間常數 $\tau = L/R = 4/2 = 2\text{s}$ ，放電期間

$$v_L(t) = -Ee^{\frac{-t}{L/R}} \quad v_R(t) = Ee^{\frac{-t}{L/R}} = -v(t) \quad i(t) = \frac{E}{R}e^{\frac{-t}{L/R}} = \frac{v_R(t)}{R}$$

- (2) $t < 0$ 時， $v_L = 0$ ， $v_R = 10\text{V}$ ， $i = 10/2 = 5\text{A}$ （順時針）。
 (3) $t = 0$ 時， $v_L(0) = -10\text{V}$ ， $v_R(0) = 10\text{V}$ ， $i(0) = 5\text{A}$ （瞬間也是順時針 5A ）。
 （ $t = 0$ 時電感瞬間感應一個下正上負的 10V 電壓，以便維持原電流的大小與方向）
 (4) $t = 2\text{s}$ ， $v_L(2) \doteq -3.68\text{V}$ ， $v_R(2) \doteq 3.68\text{V}$ ， $i(2) \doteq 1.84\text{A}$
 (5) $t = 4\text{s}$ ， $v_L(4) \doteq -1.35\text{V}$ ， $v_R(4) \doteq 1.35\text{V}$ ， $i(4) \doteq 0.67\text{A}$
 (6) $t = 6\text{s}$ ， $v_L(6) \doteq -0.5\text{V}$ ， $v_R(6) \doteq 0.5\text{V}$ ， $i(6) \doteq 0.25\text{A}$
 (7) $t = 8\text{s}$ ， $v_L(8) \doteq -0.2\text{V}$ ， $v_R(8) \doteq 0.2\text{V}$ ， $i(8) \doteq 0.1\text{A}$
 (8) $t = 10\text{s}$ ， $v_L(10) \doteq 0\text{V}$ ， $v_R(10) \doteq 0$ ， $i(10) \doteq 0$
 (9) $v_L(t)$ 函數如圖 (2)， $v_R(t)$ 函數如圖 (3)。

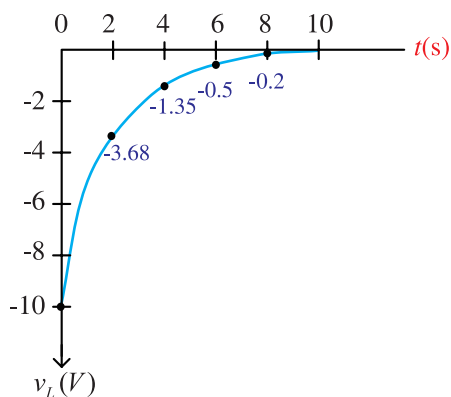


圖 (2) $v_L(t)$ 函數圖

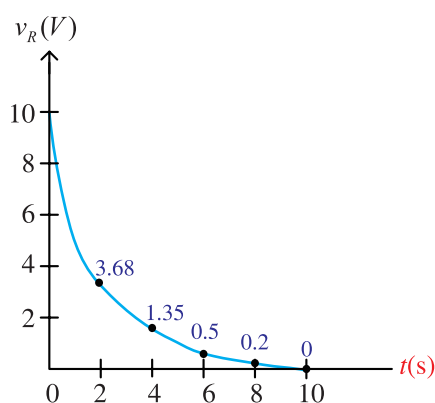


圖 (3) $v_R(t)$ 函數圖

(10) 以下是依據放電公式，寫程式繪出 $v_L(t)$ 與 $v_R(t)$ 函數圖

```
import matplotlib.pyplot as plt
#載入繪圖模組
import numpy as np #載入numpy 模組
E=10;R=2;L=4;tau=L/R
t = np.arange(0, 5*tau, tau/10)
# t為串列，其值從0到5*tau，dt=0.1tau
y1=-E*(np.e)**(-t/tau)#計算每一個x對應的y
值，y也是串列
y2=E*(np.e)**(-t/tau)
plt.plot(t,y1)#繪出vL函數圖形，藍色
plt.plot(t,y2)#繪出vR函數圖形，紅色
plt.axhline(y=0)#繪出x軸
plt.axvline(x=0)#繪出y軸
plt.show() #於視窗輸出圖形
```

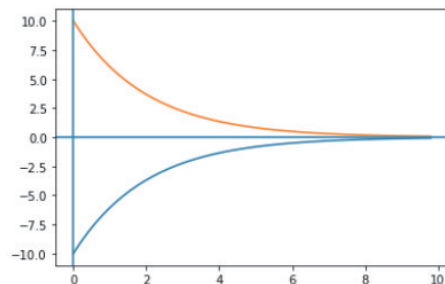


圖 (4) 藍色是 $v_L(t)$ ，紅色是 $v_R(t)$ 函數圖

(11) 以上程式可繪出函數圖形，若只要求出指定時間的 v_L 、 v_R 、 i 值，則程式如下：

```
import math#載入math模組
e=math.e #使用e常數
E=10;R=2;L=4;tau=L/R
t=2 #時間在此修改
v1=-E*e**(-(t/tau)) #vc(t)
vr=E*e**(-(t/tau)) #v1(t)
i=vr/R
print(v1)#-3.68
print(vr)#3.68
print(i)#1.83
```

範例7-3c

如圖 (1) 所示之電路，開關 SW 閉合一段時間達穩態後，在 $t=0$ 時將開關 SW 切離，則切離瞬間電感器兩端之電壓 v_L 為何？

統測 108

(A) 10V (B) 20V (C) 40V (D) 50V

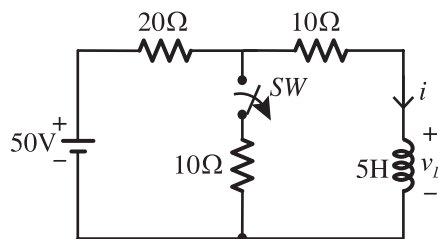


圖 (1)

解

(1) 電感的特性是電流維持不變，也就是電流來了，我產生電壓反抗，電流沒了，我提供電壓，讓電流能維持不變。

(2) 本例 SW 閉合穩定時 $v_L = 0V$ ，等效電路如圖 (2)。

$$I = \frac{50}{20 + (10 // 10)} = 2A \Rightarrow I_1 = I_2 = 1A$$

(3) SW 切離前，電感電流向下 $1A$ ， SW 切離瞬間，電感電流也要維持 $1A$ ，所以

$$50 = 20 \cdot 1 + 10 \cdot 1 + v_L \Rightarrow v_L = 20V$$

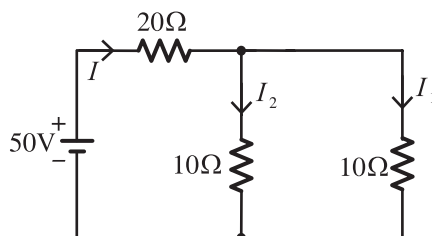


圖 (2)

自我練習

1. 如圖 (3) 所示電路，若電感器，電容器於開關 S 閉合前皆無儲存能量，則 S 閉合後之電流 I 的穩態值為何？

- (A) 1.27mA (B) 1.56mA
(C) 2mA (D) 2.8mA

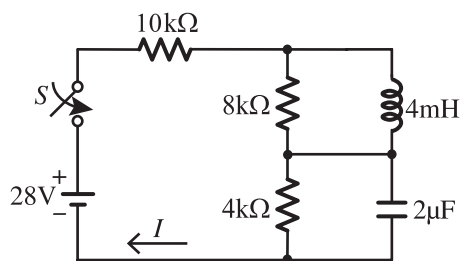


圖 (3)

範例7-3d

如圖 (1) 所示，電感在開關 S 閉合前已無儲能，若開關 S 在時間 $t=0$ 時閉合，則 $t>0$ 的電壓 $v(t)$ 為何？

- (A) $v(t) = 20(1 - e^{-100t})V$
(B) $v(t) = 20(1 - e^{-50t})V$
(C) $v(t) = 20 + 10e^{-100t}V$
(D) $v(t) = 20 + 10e^{-50t}V$

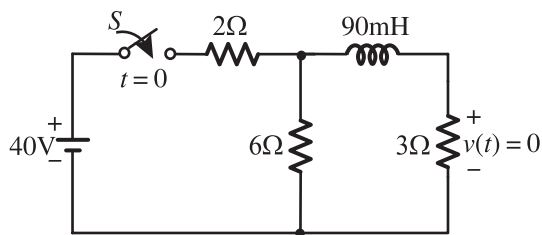


圖 (1)

解

1. 看到複雜的電路大多是先用戴維寧等效電路化簡，本例將 90mH 的電感與 3Ω 的電阻看成負載求其戴維寧等效電路。

$$V_{th} = 40 \cdot \frac{6}{2+6} = 30V$$

$$R_{th} = (2 // 6) = \frac{2 \cdot 6}{2+6} = \frac{3}{2} = 1.5\Omega$$

2. 重畫簡化後的電路如圖 (2)，此即為標準 RL 充電電路，可使用 RL 串聯充電公式，所以充電時間常數

$$\tau = \frac{L}{R} = \frac{90m}{4.5} = 0.02 \text{ s}$$

3. $v_R(t) = 30(1 - e^{-\frac{t}{0.02}}) = 30(1 - e^{-50t})$ ，此 v_R 是 1.5Ω 與 3Ω 的共同效應，題目只要 3Ω 的效應，所以是 $\frac{3}{4.5} \cdot 30(1 - e^{-50t}) = 20(1 - e^{-50t})V$ ，答案選 B。

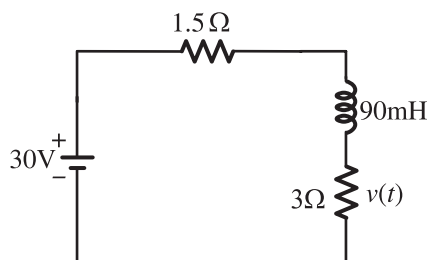


圖 (2)

自我練習

1. 電路如圖 (3)，求 (1) 電路導通的瞬間，電流 i 為多少？ (2) 電路的時間常數？ (3) 電路達穩態後的電流 i 是多少？

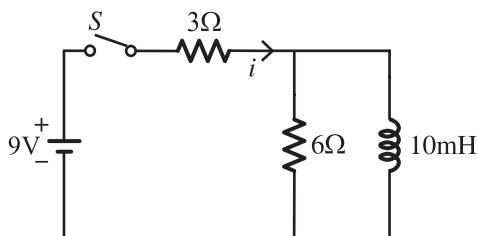


圖 (3)

2. 電路如圖 (4)，(1) 開關 S 閉合一段時間， i 為多少？ (2) 打開 S 瞬間， v_L 是多少？ (3) 打開後， $t=0.4$ 秒， v_L 是多少？ (4) 打開穩定後， i 為多少？

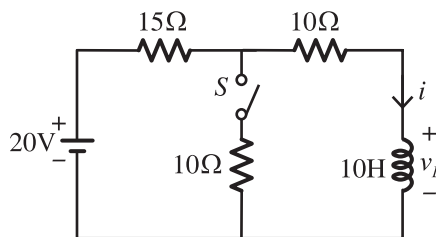


圖 (4)

3. 電路如圖 (5)，開關 S 打開的瞬間，電感的感應電動勢為何？（請註明方向）

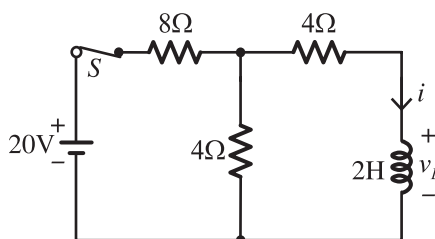
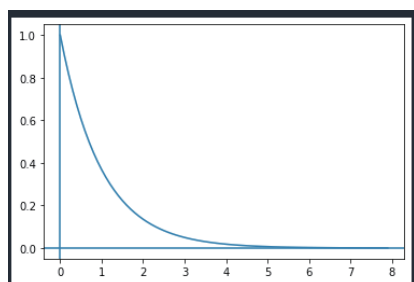
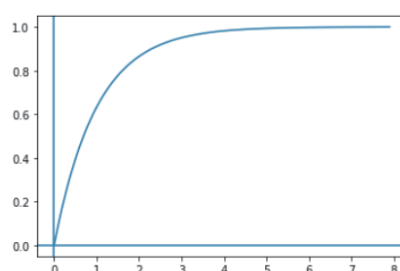


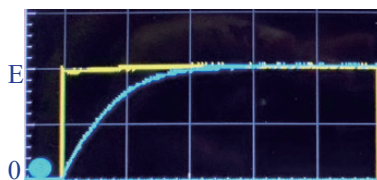
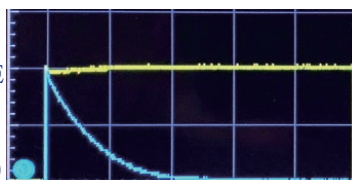
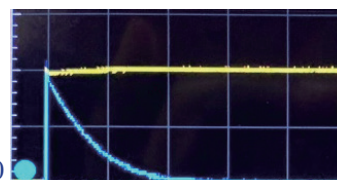
圖 (5)

7-4 本章內容摘要

1. $e \doteq 2.718$, $e^0 \doteq 1$, $e^{-1} \doteq 0.368$, $e^{-2} \doteq 0.135$, $e^{-3} \doteq 0.05$, $e^{-4} \doteq 0.02$, $e^{-5} \doteq 0$ 。
2. $1 - e^{-1} \doteq 0.632$, $1 - e^{-2} \doteq 0.865$, $1 - e^{-3} \doteq 0.95$, $1 - e^{-4} \doteq 0.98$, $1 - e^{-5} \doteq 1$ 。
3. $f(x) = e^{-x}$ 圖形如圖 (1) (趨近於 0), $f(x) = 1 - e^{-x}$ 圖形如圖 (2) (趨近於 1)。

圖 (1) $f(x) = e^{-x}$ 圖形圖 (2) $f(x) = 1 - e^{-x}$ 圖形

4. 電容是由平行電板組成，可以儲存電荷。
5. 電容充電， $v_C(t)$ 、 $v_R(t)$ 、 $i(t)$ 波形，如圖 (3)、圖 (4)、圖 (5)：

圖 (3) $v_C(t)$ 圖 (4) $v_R(t)$ 圖 (5) $i(t)$ 黃色是電源，藍色是 $v_C(t)$ 黃色是電源，藍色是 $v_R(t)$ 黃色是電源，藍色是 $i(t)$

$v_C(t)$ 、 $v_R(t)$ 、 $i(t)$ 充電方程式分別是：

$$v_C(t) = E(1 - e^{-\frac{t}{RC}}) \text{ (V)} \quad (\text{電容充電後，} v_C \text{ 趨近於 } E)$$

(公式7-2a)

$$v_R(t) = E e^{-\frac{t}{RC}} \text{ (V)} = E - v_C(t) \text{ (V)} \quad (\text{電容充電後，} v_R \text{ 趨近於 } 0)$$

(公式7-2b)

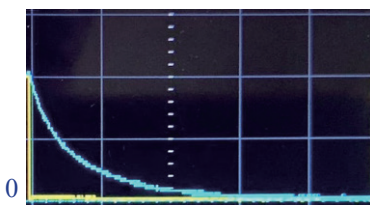
$$i(t) = \frac{E}{R} e^{-\frac{t}{RC}} \text{ (A)} = v_R(t) / R \text{ (A)}$$

(公式7-2c)

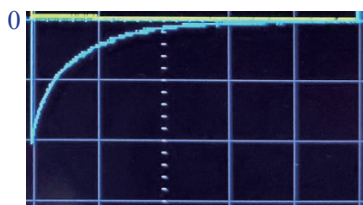
$$\text{時間常數 } \tau = RC \text{ (s)}$$

(公式7-2d)

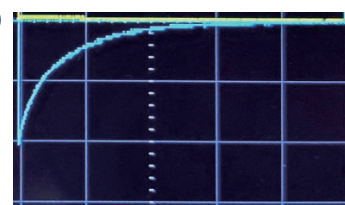
6. 電容放電， $v_C(t)$ 、 $v_R(t)$ 、 $i(t)$ 波形，如圖 (6)、圖 (7)、圖 (8)：

圖 (6) $v_C(t)$

黃色是電源，藍色是 $v_C(t)$

圖 (7) $v_R(t)$

黃色是電源，藍色是 $v_R(t)$

圖 (8) $i(t)$

黃色是電源，藍色是 $i(t)$

$v_C(t)$ 、 $v_R(t)$ 、 $i(t)$ 放電方程式分別是：

$$v_C(t) = Ee^{-\frac{t}{RC}} \text{ (V)} \text{ (放電都是放到 0)}$$

(公式7-2e)

$$v_R(t) = -Ee^{-\frac{t}{RC}} \text{ (V)} = -v_C(t) \text{ (V)} \text{ (放電都是放到 0，請留意放電方向改變了)}$$

(負號表示與原充電電壓極性相反)

(公式7-2f)

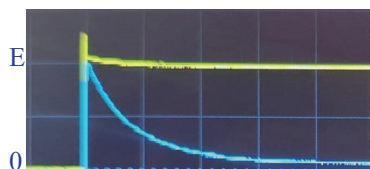
$$i(t) = -\frac{E}{R}e^{-\frac{t}{RC}} \text{ (A)} = \frac{v_R(t)}{R} \text{ (A)}$$

(負號表示與原充電電流方向相反)

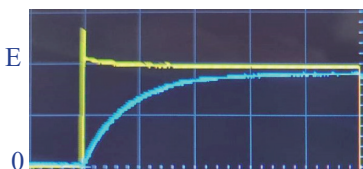
(公式7-2g)

7. 電感是由線圈纏繞而成，當電流來時，會瞬間產生反電動勢抵抗，然後此反電動勢會慢慢消失；當電流消失時，會瞬間產生電動勢彌補電流的消失，且此反電動勢也會慢慢消失，也就是電感的特性，都在讓電流能維持不變。

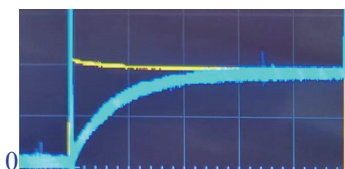
8. 電感充電， $v_L(t)$ 、 $v_R(t)$ 、 $i(t)$ 波形，如圖 (9)、圖 (10)、圖 (11)：(圖中的異常突波為空間中的雜訊，線段不連續與示波器的取樣頻率有關)

圖 (9) $v_L(t)$

黃色是電源，藍色是 $v_L(t)$

圖 (10) $v_R(t)$

黃色是電源，藍色是 $v_R(t)$

圖 (11) $i(t)$

黃色是電源，藍色是 $i(t)$

$v_L(t)$ 、 $v_R(t)$ 、 $i(t)$ 充電方程式分別是：

$$v_L(t) = Ee^{-\frac{t}{L/R}} \text{ (V)}$$

(公式7-3a)

(電感充電是感應 E ，反抗一下，然後趨近 0)

$$v_R(t) = E(1 - e^{-\frac{t}{L/R}}) \text{ (V)} = E - v_L(t) \text{ (V)}$$

(公式7-3b)

(充電是『電阻+電感 = E 』，所以趨近 E)

$$i(t) = \frac{E}{R}(1 - e^{-\frac{t}{L/R}}) \text{ (A)} = \frac{v_R(t)}{R} \text{ (A)} \quad (i \text{ 都是 } v_R/R)$$

(公式7-3c)

$$\tau = \frac{L}{R} \text{ (s, 電容充放電是 } \tau = RC)$$

(公式 7-3d)

9. 電感放電， $v_L(t)$ 、 $v_R(t)$ 、 $i(t)$ 波形，如圖 (12)、圖 (13)、圖 (14)：(圖中的異常突波為空間中的雜訊，線段不連續與示波器的取樣頻率有關)

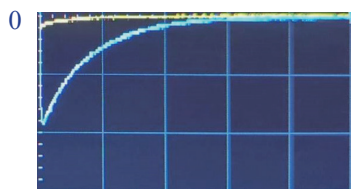


圖 (12) $v_L(t)$

黃色是電源，藍色是 $v_L(t)$

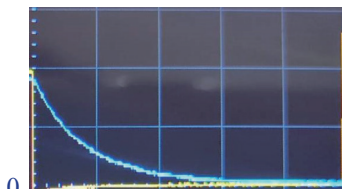


圖 (13) $v_R(t)$

黃色是電源，藍色是 $v_R(t)$

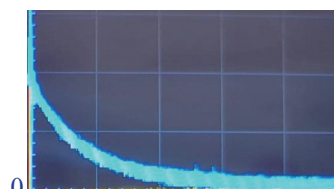


圖 (14) $i(t)$

黃色是電源，藍色是 $i(t)$

$v_L(t)$ 、 $v_R(t)$ 、 $i(t)$ 放電方程式分別是：

$$v_L(t) = -Ee^{-\frac{t}{L/R}} \text{ (V)} \quad (\text{電感放電是補充一下 } E, \text{ 然後趨近 } 0)$$

(負號表示與原充電電壓極性相反)

(公式7-3e)

$$v_R(t) = Ee^{-\frac{t}{L/R}} \text{ (V)} = -v_L(t) \text{ (V)} \quad (\text{放電放到 } 0, \text{ 且同充電方向})$$

(公式7-3f)

$$i(t) = \frac{E}{R}e^{-\frac{t}{L/R}} \text{ (A)} = \frac{v_R(t)}{R} \text{ (A)} \quad (i \text{ 都是 } v_R/R)$$

(公式7-3g)

10. 以上電容與電感充放電的電壓與電流整理如下表：（放電的負號代表與充電方向相反）

RC充放電	電容電壓	電阻電壓	電流	電流方向
電容充電	$0 \rightarrow E$	$E \rightarrow 0$	$E/R \rightarrow 0$	順時針
電容放電	$E \rightarrow 0$	$-E \rightarrow 0$	$-E/R \rightarrow 0$	逆時針
RL充放電	電感電壓	電阻電壓	電流	電流方向
電感充電	$E \rightarrow 0$	$0 \rightarrow E$	$0 \rightarrow E/R$	順時針
電感放電	$-E \rightarrow 0$	$E \rightarrow 0$	$E/R \rightarrow 0$	順時針

11. 電容充放電解題步驟。

- (1) 都是先算出充放電時間常數，電容充放電時間常數是 $\tau = RC$ ，電感充放電時間常數是 $\tau = L/R$ ，充放電時間都與 C 與 L 成正比， C 與 L 都是放分子；電感都是相反，所以電感的 R 放分母。
- (2) 算出經過幾個時間常數。
- (3) 電容 C 與電感 L 是主角，電容充放電先算出電容電壓，電感充放電先算出電感電壓。
- (4) 依據 KVL，充電時電阻電壓是：（電源電壓 E ）-（電容或電感電壓）；放電時，電阻電壓都是：（電容或電感電壓）的負值。
- (5) 依據歐姆定律，電流都是電阻電壓除以電阻值。
- (6) 若電路複雜，不是標準 RC 或 RL 充放電電路，都是先嘗試使用戴維寧定理，將電容或電感先移開，化簡電路，使其剩下單一電源與單一戴維寧電阻，然後就是標準電容或電感充放電電路，就可帶入電容或電感充放電公式。

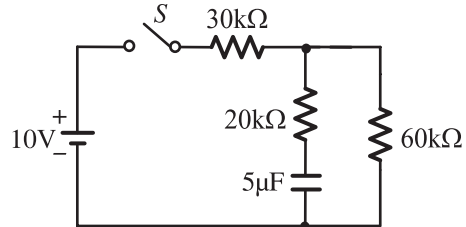
7-5 課後習題

選擇題

1. 如右圖所示，開關 S 閉合時的充電時間常數及開關 S 啓斷後的放電時間常數，分別為多少秒？

統測 106

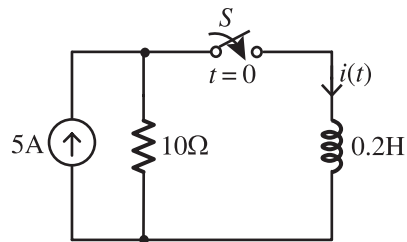
- (A) 0.25 及 0.4 (B) 0.4 及 0.2
(C) 0.4 及 0.25 (D) 0.2 及 0.4



2. 如右圖所示，若開關 S 閉合時 $t=0$ ，則 $t>0$ 的電流 $i(t)$ 為何？

統測 106

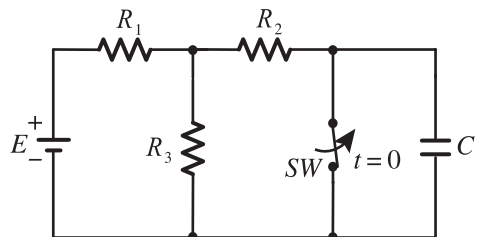
- (A) $i(t) = 50(1 - e^{-50t})$ A
(B) $i(t) = 50(1 - e^{-t/50t})$ A
(C) $i(t) = 5(1 - e^{-50t})$ A
(D) $i(t) = 5e^{-50t}$ A



3. 如右圖所示，若電壓源 $E=15$ V， $R_1=R_2=R_3=10\Omega$ ， $C=10\mu$ F，開關 SW 打開時為 $t=0$ ，則下列敘述何者錯誤？

統測 105

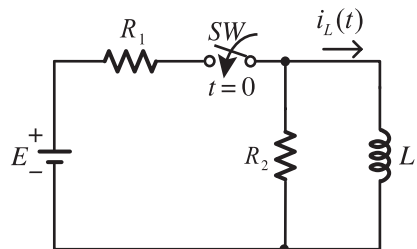
- (A) $t>0$ 之電路時間常數 $\tau = 0.3$ ms
(B) $t=0$ 電容器的電壓為零
(C) 開關打開後電路達穩態時電容器 C 電壓大小為 7.5V
(D) 電路達穩態後，沒有電流流過電容器 C



4. 如右圖所示，若電壓源 $E=24$ V， $R_1=3\Omega$ ， $R_2=6\Omega$ ， $L=5$ mH，開關 SW 閉合時為 $t=0$ ，請問 $t>0$ 之 $i_L(t)$ 為何？

統測 105

- (A) $16(1 - e^{-400t})$ A
(B) $8(1 - e^{-400t})$ A
(C) $16e^{-400t}$ A
(D) $8e^{-400t}$ A



5. 如右圖所示，假設 $E=20\text{V}$ ， $R=5\Omega$ ， $L=5\text{H}$ ，若將開關 S 由位置 "0" 切換至 "1"，試求：

台電 111

(1) $t=0$ 秒時之 v_L ？

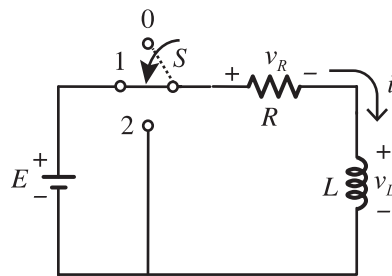
(A) 0V (B) 7.36V (C) 12.64V (D) 20V

(2) $t=1$ 秒時之 v_L ？

(A) 0V (B) 7.36V (C) 12.64V (D) 20V

(3) $t \geq 5$ 秒時之 v_L ？

(A) 0V (B) 7.36V (C) 12.64V (D) 20V

(註： $e^{-1}=0.368$ 、 $e^{-2}=0.135$ 、 $e^{-3}=0.05$)

6. 如右圖所示，假設電容無初始儲存能量，當 $t=0$ 秒時將 K 扳至 a 點，試求：

台電 109

(1) 電路時間常數 τ 為多少秒？

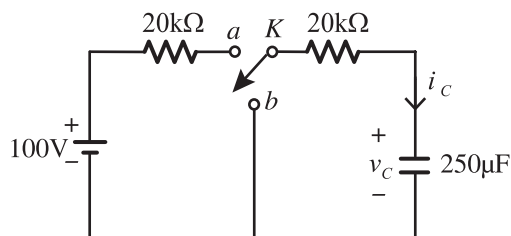
(A) 10s (B) 10ms (C) 100s (D) 30s

(2) 當 $t=30$ 秒時， $V_c(t=30\text{s})$ 為多少伏特 (V)？

(A) 98V (B) 95V (C) 86.5V (D) 0V

(3) 若在 $t=30$ 秒時瞬間將 K 扳至 b 點，則 $t=40$ 秒時， i_c 為多少安培 (A)？

(A) 0.64A (B) 0.64mA (C) 0.68mA (D) -0.64mA



7. 如右圖所示電路， $R=6\text{k}\Omega$ ， $C=1\mu\text{F}$ ，則時間常數為多少？

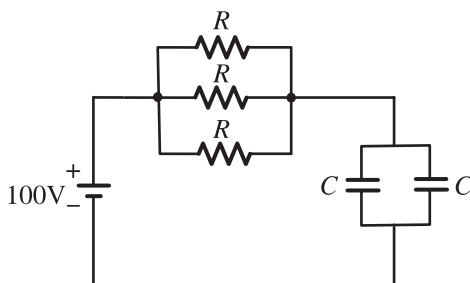
中油 111

(A) 1m sec

(B) 4m sec

(C) 9m sec

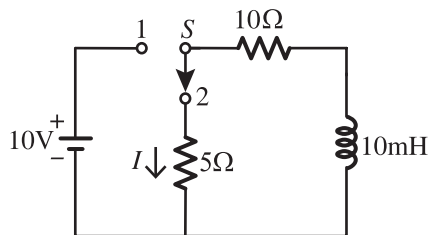
(D) 36m sec



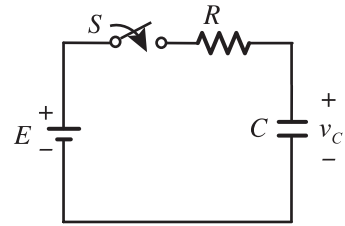
8. 如右圖所示電路，開關 S 已經在 1 的位置一段時間，電路已達穩定。若將開關切到 2 的位置，請問圖中 I 的瞬間電流大小為何？

自來水 110

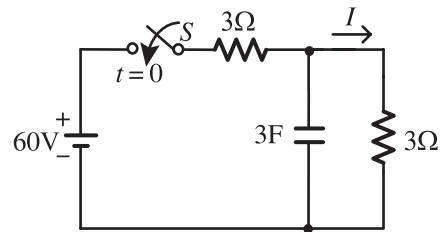
(A) 1A (B) -1A (C) 2A (D) -2A



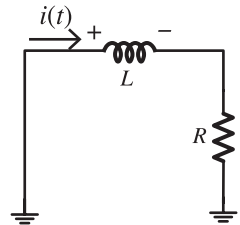
9. 如右圖所示，若 $E=100\text{V}$ ， $R=10\text{k}\Omega$ ， $C=50\text{nF}$ ，且電容器的初始電壓為 30V ，當開關 S 閉合之瞬間，流經電阻的電流為多少？ 112 台北捷運



10. 如右圖所示，開關閉合前，電容器沒有儲存能量。在開關閉合後的瞬間，電流 I 為多少安培 (A)？ 112 台北捷運

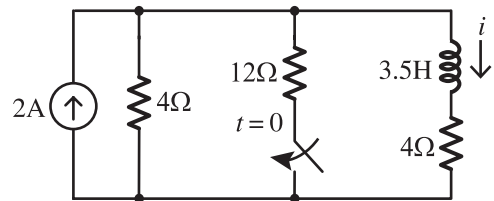


11. 如右圖所示之無源 RL 電路，若 $L=2\text{mH}$ ， $R=10\Omega$ 及 $I(0)=I_0=5\text{A}$ ，求電流 $i(t)$ 之方程式？ 111 鐵路特考



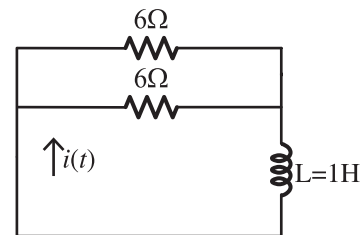
- (A) $i(t)=0.5e^{-5000t}\text{A}$
 (B) $i(t)=0.5e^{-500t}\text{A}$
 (C) $i(t)=5e^{-500t}\text{A}$
 (D) $i(t)=5e^{-5000t}\text{A}$

12. 如右圖所示之電路，開關於 $t=0$ 時閉合，求 $i(\infty)$ 為何？ 112 身心障礙特考



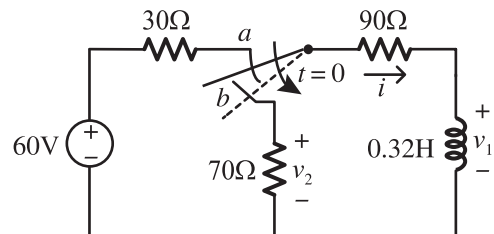
- (A) $12/7\text{A}$ (B) 1.0A
 (C) $6/7\text{A}$ (D) $8/7\text{A}$

13. 如右圖所示之電路，在 $t=0$ 時之電流 $i(0)=10\text{A}$ ，求其 $t>0$ 之電流 $i(t)$ 為何？ 112 初等考試



- (A) $10e^{-t}$ (B) $10e^{-2t}$
 (C) $10e^{-3t}$ (D) $10e^{-4t}$

14. 如右圖所示的電路，電源是 60V 的直流電，電感值為 0.32H 。開關停留在 a 的位置很長一段時間，電路處於穩定的狀態；在 $t=0$ 秒鐘時，迅速切換到 b 位置，試回答下列的開題：



- (1) $t=0$ 時，開關在 a 位置，流經電感的電流 i 為多少？

- (A) 0.5A (B) 5A (C) 1A (D) 2A

(2) $t=0$ 時，電感儲存能量為多少焦耳？

(A) 0.01J (B) 0.04J (C) 1J (D) 0.02J

(3) $t=0$ 時，開關已切換到 b 位置時的電流 i 為多少？

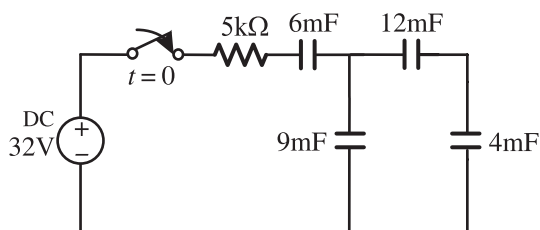
(A) 0.5A (B) 5A (C) 1A (D) 3A

(4) $t \geq 0$ 之後， $i(t)$ 的時間常數？

(A) 0.002s (B) 0.02s (C) 0.01s (D) 0.001s

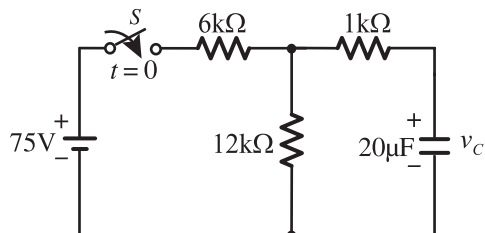
(5) $t \geq 0$ 之後，電感兩端的電壓方程式。 112 關務特考

15. 如右圖所示的電路中，各個電容器原本都沒有儲存任何電荷量，開關在時間 $t=0$ 時閉合，假設經過 5 倍時間常數電容器能夠充滿電荷達到直流穩態，計算此電路需幾秒即可完成充電？ 112 鐵路特考



(A) 40 秒 (B) 60 秒 (C) 100 秒 (D) 120 秒

16. 如右圖所示電路，在 $t=0$ 秒時將開關 S 閉合；若電容電壓初值為 10V，則 S 閉合後的電容器瞬間電流 $I_C(0)$ 與充電時間常數 T_C 分別為何？ 111 台北自來水



(A) $I_C(0)=8\text{mA}$ ， $T_C=0.1$ 秒

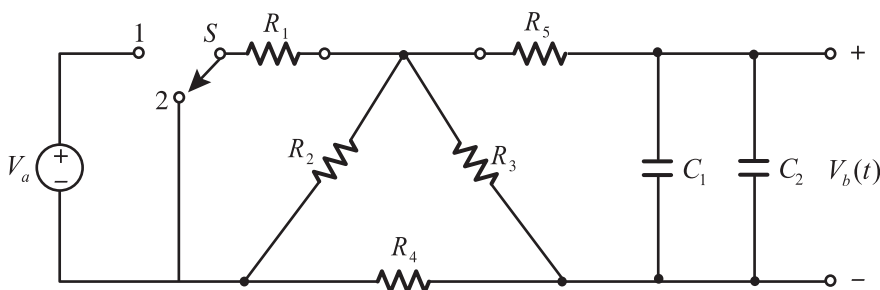
(B) $I_C(0)=10\text{mA}$ ， $T_C=0.15$ 秒

(C) $I_C(0)=12\text{mA}$ ， $T_C=0.2$ 秒

(D) $I_C(0)=15\text{mA}$ ， $T_C=0.25$ 秒

17. 如圖所示之電路，電容 C_1 和 C_2 之初始電壓為 0，即 $V_b(0)=0$ ，開關 S 在 $t<0$ 時，長時間穩定接在 2 的位置點，在 $t=0$ 時， S 接到 1 的位置點， $t \geq 0$ 時， V_a 開始供電電路，其中 $V_a=10\text{V}$ ， $C_1=C_2=1\mu\text{F}$ ， $R_1=R_5=10\Omega$ ， $R_2=R_3=R_4=6\Omega$ ，試計算在時間 $t \geq 0$ 時， $V_b(t)$ 的電壓變化等式為何 (V)？

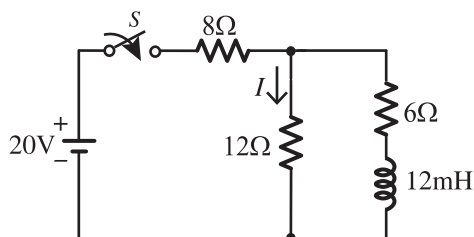
112 普考



18. 如右圖所示電路，開關未閉合前，流經電感器之電流為 0A ，當開關 S 按下的瞬間，電流 $I = ?$

111 台糖

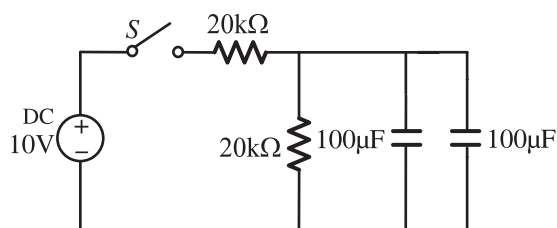
- (A) $\frac{5}{9}\text{A}$ (B) 1A
(C) $\frac{9}{10}\text{A}$ (D) $\frac{5}{3}\text{A}$



19. 如右圖所示電路，在時間 $t=0$ 時開關 S 閉合，計算此電路之充電時間常數為何？

111 地方特考

- (A) 1 秒 (B) 2 秒
(C) 4 秒 (D) 5 秒



素養觀念題

1. 圖 (1) 是 RC 充放電示波器（電路如圖 7-2a，SW 以信號產生器的 10V 方波模擬）輸出圖，黃色 CH1 是 $v_s(t)$ 波形（Volts/Div=5V），藍色 CH2 是 $v_c(t)$ 波形（Volts/Div=5V），Time/Div=100μs，請問電源 $v_s(t)$ 頻率=_____， RC 充放電時間常數=_____，電源 $v_s(t)$ 的 V_{p-p} =_____，直流偏壓=_____。

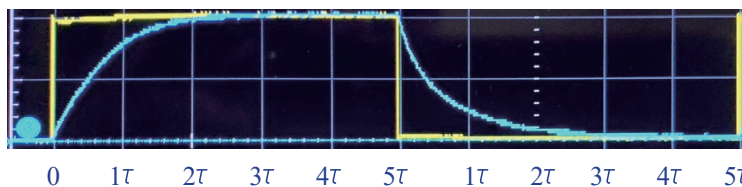


圖 (1)

2. 圖 (2) 是 RC 充放電（電路如圖 7-2a）示波器圖，黃色 CH1 是 $v_s(t)$ 波形（Volts/Div=5V），藍色 CH2 是 $v_R(t)$ 波形（Volts/Div=5V），Time/Div=200μs，請問電源 $v_s(t)$ 頻率=_____， RC 時間常數=_____，充電與放電的電流方向是否相同？_____。

3. 圖 (3) 是 RC 充放電 (電路如圖 7-2a) 示波器圖，黃色 CH1 是 $v_s(t)$ 波形 (Volts/Div=5V)，藍色 CH2 是 $i(t)$ 波形 (Volts/Div=5mV)，Time/Div=100 μ s，請問電源頻率 = _____， RC 時間常數 = _____，充電與放電的電流方向是否相同？ _____。

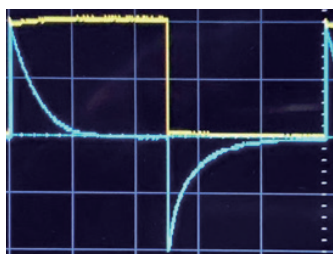


圖 (2)

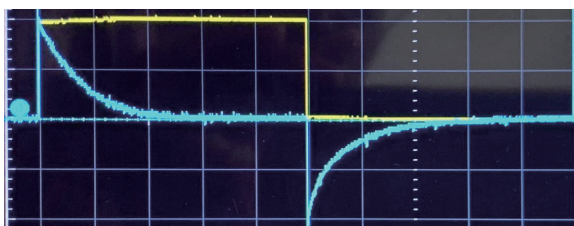


圖 (3)

4. 圖 (4) 是 RL 充放電 (電路如圖 7-3a，SW 以信號產生器的 10V 方波模擬) 示波器圖，黃色 CH1 是 $v_s(t)$ 波形 (Volts/Div=5V)，藍色 CH2 是 $v_L(t)$ 波形 (Volts/Div=5V)，Time/Div=10 μ s，請問電源頻率 = _____， RL 時間常數 = _____。

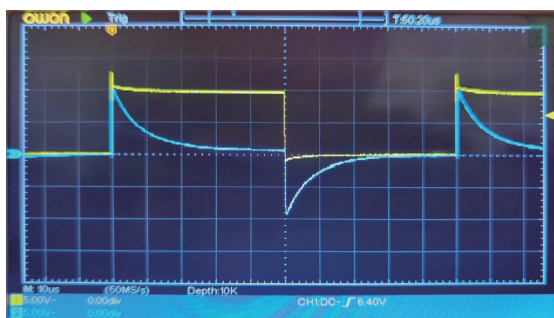


圖 (4)

5. 圖 (5) 是 RL 充放電 (電路如圖 7-3a) 示波器圖，黃色 CH1 是 $v_s(t)$ 波形 (Volts/Div=5V)，藍色 CH2 是 $v_R(t)$ 波形 (Volts/Div=5V)，Time/Div=10 μ s，請問電源頻率 = _____， RL 時間常數 = _____，充電與放電的電流方向是否相同？ _____。

6. 圖 (6) 是 RL 充放電 (電路如圖 7-3a) 示波器圖，黃色 CH1 是 $v_s(t)$ 波形 (Volts/Div=5V)，藍色 CH2 是 $i(t)$ 波形 (Volts/Div=5mV)，Time/Div=10 μ s，請問電源頻率 = _____， RL 時間常數 = _____，充電與放電的電流方向是否相同？ _____。

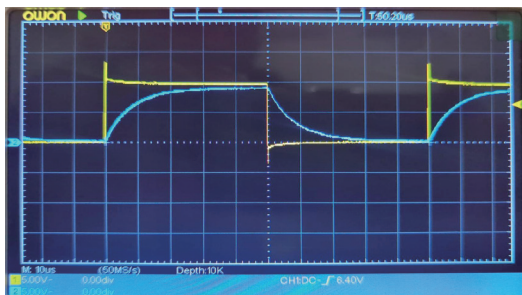


圖 (5)

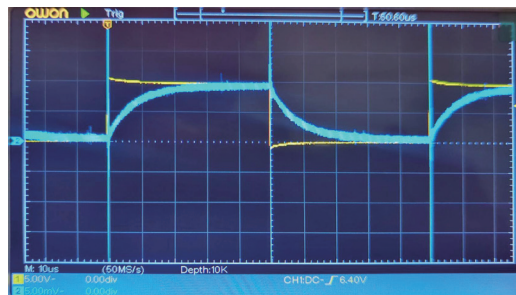


圖 (6)

MEMO

Chapter 08

交流電



學習大綱

- 8-1 電力系統的認識
- 8-2 三角函數演練
- 8-3 波形
- 8-4 頻率、週期
- 8-5 相位
- 8-6 相量運算
- 8-7 本章內容摘要
- 8-8 課後習題

學習目標

- 1. 能認識電力系統
- 2. 能完成 $\sin\theta$ 、 $\cos\theta$ 函數的計算
- 3. 能計算波形的平均值與有效值
- 4. 能計算波形的頻率與週期
- 5. 能計算波形相位
- 6. 能將正弦波轉為相量、計算相量的加減乘除等運算、再轉回正弦波

8-1 電力系統的認識

直流電(Direct Current, DC)

前面各章我們都使用直流電，直流電用於手機、電視、電腦、音響、各式各樣的儀器。直流電的符號如圖 8-1a 的電源 E 。圖 8-1a 是電壓不變的直流電，但只要電壓極性沒有改變，都稱為直流電，所以圖 8-1b 雖然電壓大小一直在改變，但因為電壓極性沒有改變，所以也是直流電，或稱為脈動直流電。

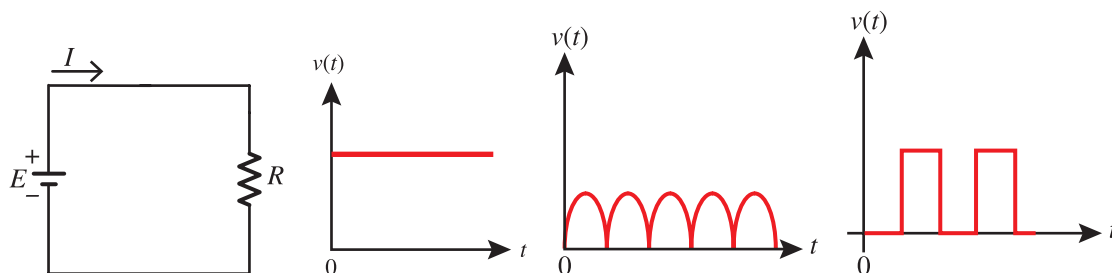


圖 8-1a 直流電

圖 8-1b 脈動直流

交流電(Alternating Current, AC)

前面的直流電是指電壓極性不變，交流電則是指電壓的大小與極性隨時都在改變，如圖 8-1c。當正半波時上方電壓為正、下方為負，電流順向流通，如圖 8-1d；而負半波時上方電壓為負、下方為正，電流反向流通，如圖 8-1e。電力公司供應的交流電都是如圖 8-1c 的正弦波 (sine wave)，圖 8-1g 是使用示波器實際量測的電力波形，由波形圖可見其電壓大小、極性隨時在改變，也就是家裡燈泡其實是持續的快速變亮與變暗，只是人類眼睛有視覺暫留現象，所以沒有察覺此閃爍狀況。

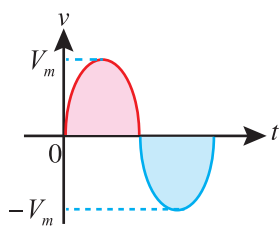


圖 8-1c 交流正弦波

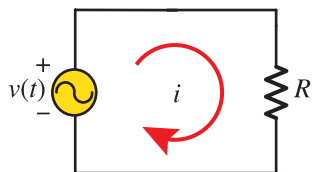


圖 8-1d 正半週供電方向

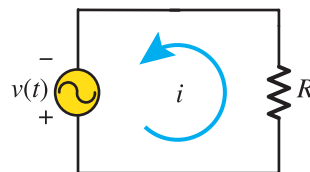


圖 8-1e 負半週供電方向

台電電力波形

發電機原理示意圖如圖 8-1f，使封閉線圈在磁場內旋轉，就能發電。圖 8-1f 使用一個 N，一個 S，稱為兩極發電機。兩極發電機線圈每轉一圈，可輸出一個正弦波。若同時使用二個 N，二個 S，則稱為四極發電機。四極發電機線圈每轉一圈，則可得二個正弦波。

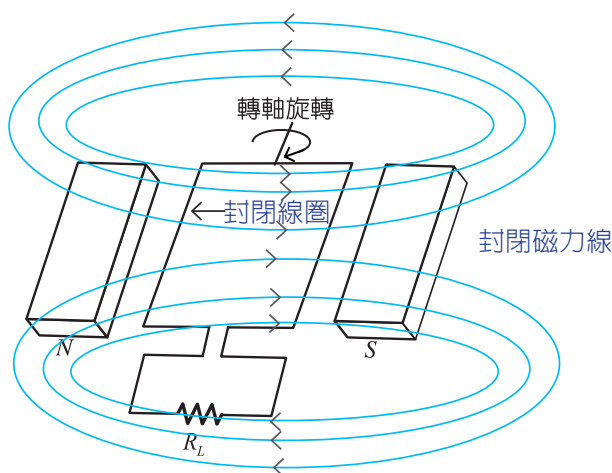


圖 8-1f 電力公司發電機示意圖

圖 8-1g 則是用示波器量測電力交流訊號 110V 插座電壓的瞬時值波形，以上 110V 是有效值。 x 軸是時間 t ，每一格是 5ms，一個週期共 3.3 格，所以週期 $T = 5\text{ms} \times 3.3 = 16.5\text{ms}$ ， $f = 1/T = 60\text{Hz}$ 。 y 軸是瞬時電壓，每一格是 5V，最大值是 3.2 格，但是我們使用 10 倍衰減棒，所以電壓最大值 V_m 是 $5 \times 3.2(\text{格}) \times 10 = 160\text{V}$ ，以上電壓瞬時值一直在變化，與前面的直流電的恆壓不同，且有正有負，此一有正有負的電壓，我們稱為交流電。(註：電學上的負值代表供電方向的改變。)

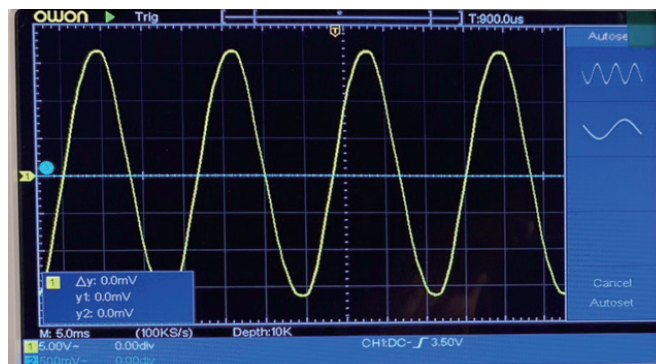


圖 8-1g 電力公司電壓瞬時值

電力系統

電力系統是由發電系統、輸供電系統、配電系統組成。以台電為例，台電電力系統由核能、大型水力、火力發電廠產生電力後，需由變壓器升壓至 345 仟伏特（345kV）的超高壓，再利用輸電線路輸送電力，然後透過超高壓變電所、一次變電所等變電所分別降壓為 161 仟伏特（161kV）、69 仟伏特（69kV）後，提供科學園區、工業區、高鐵和捷運等大型用戶用電；並透過二次變電所及配電系統再降壓分別提供一般用戶或民生用電，如圖 8-1h 所示。假若電廠發電或輸供電系統或配電系統所提供之供、輸電能力不足時，都會影響供電。

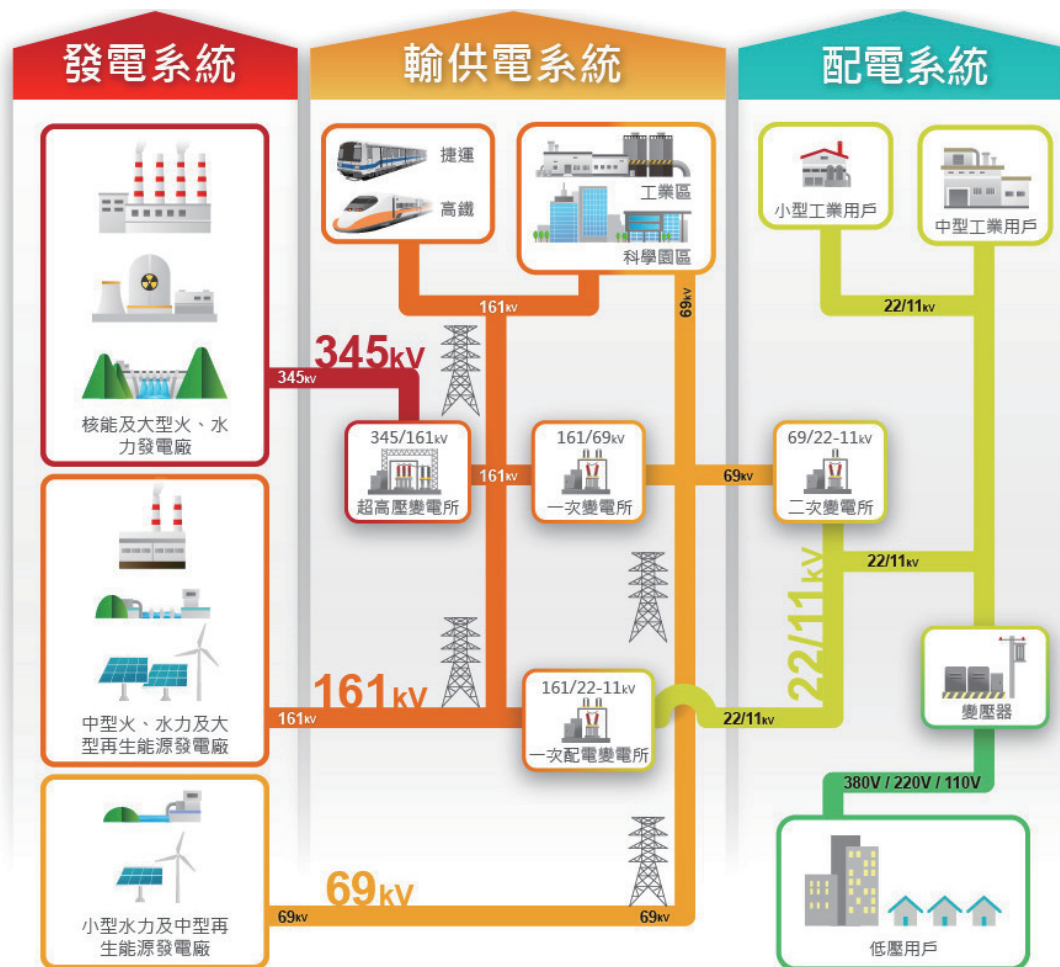


圖 8-1h 台電電力系統圖（摘自臺灣電力公司）

雖然家用用電設備大多是直流電，直流電的功能也可以完全取代交流電。但是，發電廠與住家通常很遠，唯有先提高電壓再配送，才能於長途配送，節省線路成本與減少電力損失。因為交流電電壓較容易調升與調降，所以可以使用變壓器先提高電壓，才能於長途配送時，節省線路成本與減少電力損失。當到達用戶端後，再依照使用者所需電壓任意調降。而且，直流發電機的高速整流子維護成本貴，所以全世界的商轉發電機都是交流發電機。

※ 8-2 三角函數

因為電力公司交流電的瞬時值，如圖 8-1g 可使用三角函數的 $\sin(\theta)$ 正弦波表示，所以本節先介紹三角函數。

任意三角形有三個邊，三個角，科學家為了找出其邊與角的關係，就定義出三角函數。例如已知三角形任兩邊與其所夾角度，就可透過餘弦定理找出第 3 邊的長度。所以現代人蓋六角庭、蓋橋樑、蓋房子，都可以將所有木頭或鋼板長度先計算出來，通通事先裁切好，到了現場就是組裝而已。但是古代的工匠就窘了，他們沒有三角函數，所以是一面作，一面量下一根木頭長度，一面裁切，速度當然慢。

三角函數共有 6 個函數，分別是 $\sin(\theta)$ 、 $\cos(\theta)$ 、 $\tan(\theta)$ 、 $\cot(\theta)$ 、 $\sec(\theta)$ 、 $\csc(\theta)$ ，雖然有 6 個，但其實之間都有關係，電學裡常用為正弦波 $\sin(\theta)$ 、餘弦波 $\cos(\theta)$ 與正切 $\tan(\theta)$ 函數，最常用的則為 $\sin(\theta)$ 。在數學裡定義域 θ 我們習慣用度度量，其範圍為 $0\sim 360$ 度，但電學裡我們用弧度量，也稱為徑度量，其範圍則為 $0\sim 2\pi$ ($\pi \cong 3.14159$)。

三角函數的定義

三角函數可以根據直角坐標系中半徑為 1，以圓心 O 為原點的單位圓來定義，如圖 8-2a。指定一角 θ ，假設以 A(1,0) 為起始點，如果 $\theta > 0$ 則將 OA 以逆時針方向轉動，如果 $\theta < 0$ 則以順時針方向移動，直到轉過的角度等於 θ 為止。假設最終點 A 轉到的位置為 P(x,y)，那麼 6 個三角函數值如下：

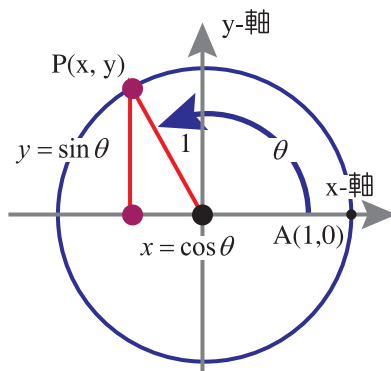


圖 8-2a 用單位圓定義三角函數
(摘自維基百科)

正弦	餘弦	正切	餘切	正割	餘割
$\sin \theta = y$	$\cos \theta = x$	$\tan \theta = \frac{y}{x}$	$\cot \theta = \frac{x}{y}$	$\sec \theta = \frac{1}{x}$	$\csc \theta = \frac{1}{y}$

例如，圖 8-2a P(x,y) 的位置為 120° ， x 量測結果將會是 $-1/2$ ， y 將會是 $\sqrt{3}/2$ ，所以 $\sin 120^\circ = y = \sqrt{3}/2$ ， $\cos 120^\circ = x = -1/2$ 。

自我練習

1. 請準備圓規與量角器，將單位圓取 10 公分，依照以上定義，量測與計算 $\sin 30^\circ$ ， $\cos -45^\circ$ ， $\tan 60^\circ$ 的值。

範例 8-2a

寫一程式，可以指派 θ ，而求的 $\sin(\theta)$ 函數值。

操作步驟

1. 數學課本的 $\sin(\theta)$ 函數都是使用度度量，但是電腦的計算都是使用徑度量，度度量繞圓一圈是 360 度，徑度量則是 2π 。
2. 度度量轉徑度量公式為：

$$\text{徑度量} = \frac{\text{度度量} \times 2\pi}{360} = \frac{\text{度度量} \times \pi}{180}$$

3. 徑度量轉度度量公式為：

$$\text{度度量} = \frac{\text{徑度量} \times 360}{2\pi} = \frac{\text{徑度量} \times 180}{\pi}$$

4. 以上轉換，程式如下，輸出結果如圖 (1)，請留意電腦實數計算會有誤差，不會剛好輸出 30，而是 29.999999999999996。

```
import math as ma #載入math 模組
print(ma.pi)#3.14
si=30
arad=si*ma.pi/180 #轉徑度量
print(arad)#0.52
a=arad*180/ma.pi #轉度度量
print(a)#29.9
```

```
3.141592653589793
0.5235987755982988
29.999999999999996
```

圖 (1) 程式輸出結果

5. 以上程式使用 math 模組，但是 Python 繪圖都需要 numpy 模組，所以以上程式，使用 numpy 模組的程式如下：

```
import numpy as np #載入numph 模組
print(np.pi)
si=30
arad=si*np.pi/180 #轉徑度量
print(arad)
a=arad*180/np.pi #轉度度量
print(a)
```

```
3.141592653589793
0.5235987755982988
29.999999999999996
```

6. 以下程式可以計算任意角的三角函數值，我們同時使用 math 與 numpy 模組，因為後續程式會一再使用此二模組。

```
import math as ma #載入math 模組
import numpy as np #載入numph 模組
print(ma.pi) #使用 math 模組
print(np.pi) #使用 numpy 模組
si=30
si=si*np.pi/180 #轉徑度量
print(ma.sin(si)) #使用 math 模組
print(np.sin(si)) #使用 numpy 模組
```

```
3.141592653589793
3.141592653589793
0.49999999999999994
0.49999999999999994
```

自我練習

1. 請寫程式，可以指派一個 θ ，求出 $\cos\theta$ 之值。

範例8-2b

寫一程式，完成任意角的 $\sin(\theta)$ 反函數值計算。(前面輸入 $\sin(\theta)$ 得到一個 $-1\sim 1$ 的值，此稱為 $\sin(\theta)$ 函數值，現在輸入一個 $-1\sim 1$ 的值，要求 θ ，稱為反函數值。)

操作步驟

1. 撰寫程式如下：請留意 math 模組 $\sin(\theta)$ 反函數是 $\text{asin}()$ ，numpy 模組 $\sin(\theta)$ 反函數是 $\text{arcsin}()$ ，所以程式如下：


```
import math as ma #載入math 模組
import numpy as np #載入numph 模組
a=0.5
print(ma.asin(a)*180/ma.pi) #使用 math 模組
print(np.arcsin(a)*180/np.pi) #使用 numpy 模組
```

```
30.000000000000004
30.000000000000004
```

2. 由圖可知，輸入 0.5 得到 30° ，此即為 $\sin()$ 反函數值。

範例8-2c

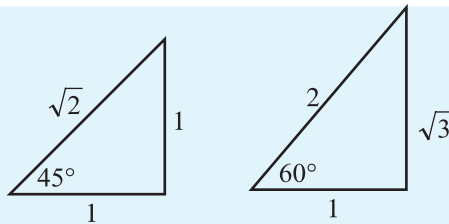
寫一程式，完成任意角的 $\tan(\theta)$ 函數值計算。

操作步驟

1. $\tan(\theta)$ 的定義是 $\tan \theta = \frac{\text{對邊}}{\text{斜邊}}$ 。

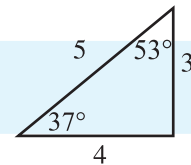
例如 $\tan(45) = 1/1$; $\tan(60) \div 1.732/1 \div 1.732$ 。撰寫程式如下：

```
import math as ma
pi=ma.pi
si=45
si=si*pi/180 #轉徑度量
a=ma.tan(si)
print(a)#0.9999
si=60*pi/180;print(ma.tan(si))#1.732 #si改為60求tan(si)值
```



2. 三角形三邊長比例若是 3 : 4 : 5，此為特別角，此三個邊對應的三個角分別接近 37, 53, 90，程式如下：

```
si=37*pi/180;print(ma.tan(si)) #3/4=0.75
si=53*pi/180;print(ma.tan(si)) #4/3=1.32
```



範例8-2d

寫一程式，完成任意角的 $\tan(\theta)$ 反函數值計算。（前面輸入 $\tan(\theta)$ 得到一個值，此稱 $\tan(\theta)$ 函數值，現在輸入兩個邊長的比值，要求 θ ，稱為反函數值。）

操作步驟

1. math 模組的 $\text{atan}(y/x)$ 函數，可以求（對邊 y / 臨邊 x ）的三角形的 θ 。
2. 請鍵入以下程式，在直角坐標系繪點，然後觀察其角度，請留意都是大邊對大角，小邊對小角； y 若是負，表示在第四項限， θ 也會是負。

```
import math as ma
pi=ma.pi
print(ma.atan(1/1)*180/pi) #45
print(ma.atan(-1/1)*180/pi) #-45
print(ma.atan(1.732/1)*180/pi) #60
print(ma.atan(-1.732/1)*180/pi) #-60
print(ma.atan(3/4)*180/pi) #37
print(ma.atan(-3/4)*180/pi) #-37
```

範例8-2e

請寫一個程式，可以繪製 $\sin \theta$ 函數圖。

操作步驟

1. 以下是 $\sin(\theta)$ 函數的定義。

$$y = \sin(\theta) = \frac{\text{對邊}}{\text{斜邊}}$$

θ 定義域是 0 到 2π 。

2. 撰寫程式如下：

```
import matplotlib.pyplot as plt #載入
繪圖 matplotlib.pyplot 模組，才能繪圖
import numpy as np #載入numpy 模組，繪
圖用數值模組
print(np.pi) #輸出pi值
```

```

si = np.arange(0, 2*np.pi+0.1, 0.1)
#產生 0到2pi數列，以si串列儲存
y = np.sin(si) #逐一產生sin(si)正弦波值
print(si) #si為串列，輸出si串列內容
plt.plot(si,y)#繪出正弦波
plt.axhline(y=0)#繪出y軸
plt.axvline(x=0)#繪出x軸
plt.show()#於螢幕輸出圖形

```

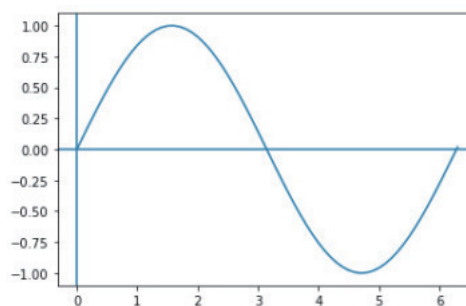


圖 (1) 程式執行結果

- 執行結果如圖 (1)，由圖可知其週期為 2π （大約為 6.28）。
- 輸出 π 值，使用徑度量，如圖 (2) 的 3.14159...
- 輸出 si 串列，如圖 (2)，中括號範圍內數值。x 為從 0 到 2π ，遞增 0.1 的串列。

```

3.141592653589793
[ 0.  0.1  0.2  0.3  0.4  0.5  0.6  0.7  0.8  0.9  1.  1.1  1.2  1.3
 1.4  1.5  1.6  1.7  1.8  1.9  2.  2.1  2.2  2.3  2.4  2.5  2.6  2.7
 2.8  2.9  3.  3.1  3.2  3.3  3.4  3.5  3.6  3.7  3.8  3.9  4.  4.1

```

圖 (2) 輸出 π 值與 si 串列

- 輸出 y 串列，如圖 (3)。不論 si 值如何變化，其值一律在 -1 與 1 之間。

```

0.0 0.1 0.2 0.3 0.4 0.5 0.6 0.6 0.7 0.8 0.8 0.9 0.9 1.0 1.0 1.0 1.0
1.0 1.0 0.9 0.9 0.9 0.8 0.7 0.7 0.6 0.5 0.4 0.3 0.2 0.1 0.0 -0.1 -0.2
-0.3 -0.4 -0.4 -0.5 -0.6 -0.7 -0.8 -0.8 -0.9 -0.9 -1.0 -1.0 -1.0 -1.0
-1.0 -1.0 -1.0 -0.9 -0.9 -0.8 -0.8 -0.7 -0.6 -0.6 -0.5 -0.4 -0.3 -0.2
-0.1 0.0 0.1 0.2 0.3 0.4 0.5 0.6 0.7 0.7 0.8 0.9 0.9 0.9 1.0 1.0 1.0

```

圖 (3) 輸出 y 串列

自我練習

- 同範例 8-2e，請使用 Python 程式繪出 $\cos(\theta)$ 餘弦波函數圖形。

範例8-2f

使用 Python 程式繪出 $\tan(\theta)$ 正切函數圖形。

操作步驟

- 以下是 $\tan(\theta)$ 函數的定義。

$$y = \tan(\theta) = \text{對邊} / \text{臨邊} = y/x$$

θ 定義域是 0 到 2π 。

2. 由以上定義，我們發現， $x=90^\circ$ 與 270° 時， x 得到 0，因為分母不能為 0，所以要扣掉這兩點，程式才不會當掉。所以定義域修正如下：

θ 定義域是 0 到 2π 。 $x \neq \pi/2, x \neq 3\pi/2$

3. 撰寫程式如下：程式撰寫時，也要扣掉這兩點，程式才不會當掉。

```
import matplotlib.pyplot as plt #載入繪圖 matplotlib.pyplot 模組，才能繪圖
import numpy as np #載入numpy 模組，繪圖用數值模組
print(np.pi) #輸出pi值
si = np.arange(0, np.pi/2, 0.1) #產生 0到pi/2數列，不含pi/2
y = np.tan(si) #逐一產生sin(x) 正弦波值
print(si)
plt.plot(si,y)#繪出正弦波

si = np.arange(np.pi/2+0.1, np.pi, 0.1) #產生 pi/2+0.1到pi數列
y = np.tan(si) #逐一產生sin(x) 正弦波值
print(si)
plt.plot(si,y)#繪出正弦波

si = np.arange(np.pi, 3*np.pi/2, 0.1) #產生 pi到3*pi/2數列，不含3*pi/2
y = np.tan(si) #逐一產生sin(x) 正弦波值
print(si)
plt.plot(si,y)#繪出正弦波

si = np.arange(3*np.pi/2+0.1, 2*np.pi, 0.1) #產生 3*pi/2+0.1到2*pi數列
y = np.tan(si) #逐一產生sin(x) 正弦波值
print(si)
plt.plot(si,y)#繪出正弦波

plt.axhline(y=0)#繪出y軸
plt.axvline(x=0)#繪出x軸
plt.show()#於螢幕輸出圖形
```

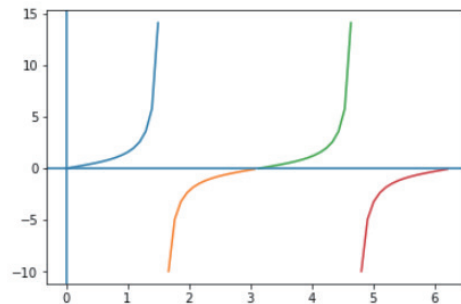


圖 (1) 程式執行結果

4. 執行結果如圖 (1)，由圖可知其週期為 π (大約為 3.14)。

特別角

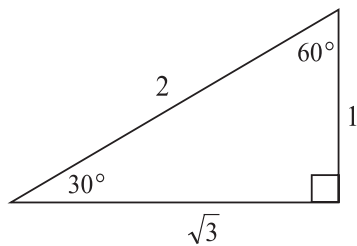
以上任意角度的三角函式值。在沒有電子計算機的年代，都需要使用查表，也就是會有一個表列出 0 到 360 所有角度的 6 個三角函數值。現在因為有計算機，所以都改由計算機計算。但考試不能帶計算機，所以使用三角函數時，通常會使用 30° 、 37° 、 45° 、 53° 、 60° 等角度，這些角度稱為特別角。因為這些特別角的邊長比例比較簡單而容易記憶，請看以下範例說明。

範例8-2g

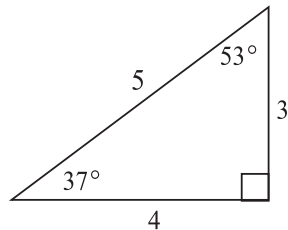
介紹第一象限特別角的三角函數值。

操作步驟

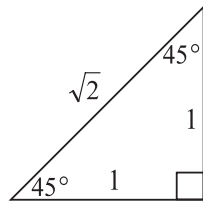
1. 當三角形的三個角度分別是 $30^\circ-60^\circ-90^\circ$ ，如圖(1)，則其三個邊長的比值，將分別是 $1:\sqrt{3}:2$ 。所以 $\sin 30^\circ = \text{對邊}/\text{斜邊} = 1/2$ ， $\cos 30^\circ = \text{臨邊}/\text{斜邊} = \sqrt{3}/2$ ， $\sin 60^\circ = \sqrt{3}/2$ ， $\cos 60^\circ = 1/2$ 。請留意大邊會對應大角。
2. 當三角形的三個角度分別是 $37^\circ-53^\circ-90^\circ$ ，如圖(2)，則其三個邊長的比值，將分別是 $3:4:5$ ，所以 $\sin 37^\circ = 3/5$ ， $\cos 37^\circ = 4/5$ ， $\sin 53^\circ = 4/5$ ， $\cos 53^\circ = 3/5$ 。
3. 當三角形的三個角度分別是 $45^\circ-45^\circ-90^\circ$ ，如圖(3)，則其三個邊長的比值，將分別是 $1:1:\sqrt{2}$ ，所以 $\sin 45^\circ = \sqrt{2}/2$ ， $\cos 45^\circ = \sqrt{2}/2$ 。
4. 以上角度都有固定的邊長比，所以稱為特別角，考試因為不能帶計算機，所以都會湊出這些特別角。



圖(1) $30^\circ-60^\circ-90^\circ$



圖(2) $37^\circ-53^\circ-90^\circ$



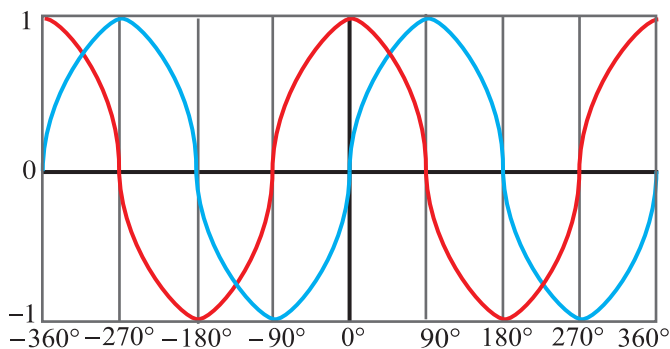
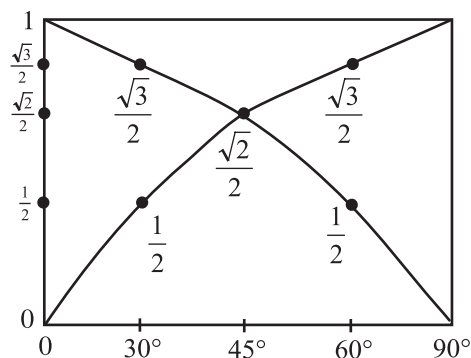
圖(3) $45^\circ-45^\circ-90^\circ$

自我練習

1. 請寫出以上 30° 、 37° 、 45° 、 53° 、 60° 特別角的 $\tan\theta$ 。
2. 若 $\sin\theta = 1/2$ ，求第 1 象限 θ 值。
3. 若 $\cos\theta = 0.6$ ，求第 1 象限 θ 值。
4. 若 $\tan\theta = 1$ ，求第 1 象限 θ 值。

廣義特別角的值

前面範例 8-2g 是第一象限特別角的值，以下則介紹全域 $-360^\circ \sim 360^\circ$ 特別角的規則， $\sin\theta$ 與 $\cos\theta$ 於 $-360^\circ \sim 360^\circ$ 的函數圖形，如圖 8-2b， $0 \sim 90^\circ$ 局部放大如圖 8-2c。

圖 8-2b $\sin\theta$ 、 $\cos\theta$ 值 (藍色是 $\sin\theta$ ，橘紅是 $\cos\theta$)圖 8-2c $0 \sim 90^\circ$ $\sin\theta$ 、 $\cos\theta$ 值

由圖 8-2c 的放大圖，可以得到每一個象限的遞增與遞減都遵循以下規則，所以看著圖 8-2b，就可以很快看出所有 $-360^\circ \sim 360^\circ$ 特別角的 $\sin\theta$ 、 $\cos\theta$ 值。

	0	30°	45°	60°	90°
遞增	$0/2=0$	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{4}/2=1$
遞減	$\sqrt{4}/2=1$	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	$0/2=0$

例如， $\sin 30^\circ = 1/2$ ， $\sin 45^\circ = \sqrt{2}/2$ ， $\sin 60^\circ = \sqrt{3}/2$ ， $\cos 30^\circ = \sqrt{3}/2$ ， $\cos 45^\circ = \sqrt{2}/2$ ， $\cos 60^\circ = 1/2$ ， $\sin 120^\circ = \sqrt{3}/2$ ， $\cos 120^\circ = -1/2$ ， $\sin(-60^\circ) = -\sqrt{3}/2$ ， $\cos(-60^\circ) = 1/2$ 。

自我練習

1. 請對照圖 8-2b，寫出以下角度的 $\sin \theta$ 、 $\cos \theta$ 值。

角度	-150°	-135°	-120°	-90°	-60°	-45°	-30°	0°	30°
$\sin \theta$									
$\cos \theta$									

角度	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	210°	225°
$\sin \theta$									
$\cos \theta$									

8-3 波形

電學中常見的波形有正弦波、方波、及三角波等波形，本節將介紹以上各種波形的瞬時值、最大值、平均值及有效值等。

正弦波(sine wave)

正弦波是最常見的交流波形，也是本書後面章節所使用的交流電參考波形。交流正弦波是一個隨時間正負交替、週期性的波形，如圖 8-3a 所示。正弦波各種波形值說明如下。

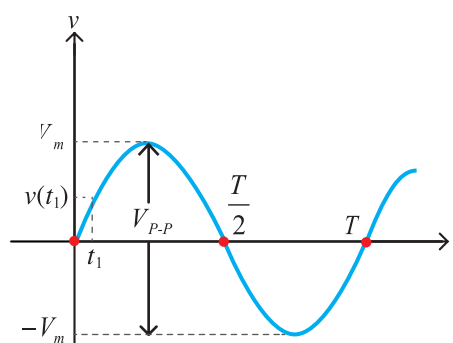


圖 8-3a 正弦波

1. **瞬時值**：用來表示波形中某一時間 t 點所對應的數值大小，以 $v(t)$ 或 $i(t)$ 表示；例如 $v(5s)$ 表示電壓波形中時間為 5 秒時的電壓值， $i(3ms)$ 表示電流波形中時間為 3 毫秒時的電流值。瞬時值 (Instantaneous value) 又稱為瞬間值。
2. **最大值**：用來表示正半週的最大值 (maximum value)，以 V_m 或 I_m 表示；最大值又稱為正峰值 (positive peak value)，以 V_p 或 I_p 表示。
3. **最小值**：用來表示負半週的最小值 (minimum value)，以 $-V_m$ 或 $-I_m$ 表示；最小值又稱為負峰值 (negative peak value)，以 $-V_p$ 或 $-I_p$ 表示。
4. **峰對峰值**：表示正峰值和負峰值的差 (peak to peak value)，以 V_{p-p} 或 I_{p-p} 表示；峰對峰值為最大值的兩倍，即

$$V_{p-p} = V_m - (-V_m) = 2V_m$$

5. **平均值 (average value, av)**：平均值以符號 V_{av} 、 I_{av} 表示，平均值是指該波形曲線的面積除以時間。必須是週期性的波形，才能計算平均值。正弦波、方波、鋸齒波及三角波等，因為其正、負半波面積相同，正負相反相互抵消，總面積代數和為 0，故其全波平均值等於 0 例如，若每秒瞬間供電是 1,2,3,2,1,0,-1,-2,-3,-2,-1,0，則其平均值是

$(1+2+3+2+1+0-1-2-3-2-1+0)/12 \approx 0V$ 。因此對稱波形習慣上以半個週期為單位進行計算。

V_{av} = 半週波形曲線所涵蓋的面積和 / 半週時間

例如，任一正弦波 $v(t) = V_m \sin(\omega t) = V_m \sin \theta$ 如圖 8-3b。因為曲線不規則，我們可以切成很多小片，每一小片的寬度是 $d\theta$ ，高度則是 $V_m \sin \theta$ ，高度會隨著 θ 的改變而改變，每一小片的面積則是 $V_m \sin \theta \cdot d\theta$ 。我們只要累加這些小片的面積，就是曲面的所有面積，以上敘述以積分表示如下：

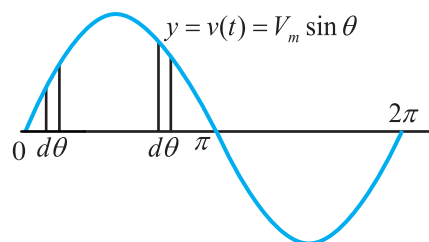


圖 8-3b 正弦波積分圖

$$A = \int_0^{\pi} y \cdot d\theta = \int_0^{\pi} V_m \sin \theta d\theta = V_m (-\cos \theta) \Big|_0^{\pi} = -V_m (-1 - 1) = 2V_m$$

以上積分為高二數學課程，本書使用 Python 程式證明 $V_m=1$ 的 $\sin \theta$ 正弦波面積是 2，程式如下：

```
import math as m
dsi=0.001
pi=m.pi
si=0
a=0
vm=1
while si<=pi:
    a=a+vm*m.sin(si)*dsi#累加每一小片面積
    si=si+dsi
print(a)#1.99999999
```

所以，正弦波的平均值為曲線面積 A 除以半週期的時間

$$V_{av} = \frac{A}{\frac{T}{2}} = \frac{2V_m}{\pi}$$

(公式8-3a)

6. **有效值**：因為對稱波形的正半週與負半週相加為零，所以平均值為零。但是，負半週並不是負值，只是供電方向相反，也是有供電，所以就有有效值的計算。有效值是先將所有值都平方，這樣可以抵銷負號的影響，然後相加，再求平均。有效值 (effective value) 以符號 V_{eff} 或 I_{eff} 、 V_{rms} 或 I_{rms} 表示之。例如，若每秒瞬間供電是 1,2,3,2,1,0,-1,-2,-3,-2,-1,0，則其平均值是 0V。其有效值是

$$\sqrt{\frac{1+4+9+4+1+0+1+4+9+4+1+0}{12}} \div 1.78V。$$

又例如，任一正弦波如圖 8-3c，我們將其平方，如圖 8-3d。因為是曲線，所以也是使用切片的方式求面積。每一片的寬度是 $d\theta$ ，高度是 $V_m^2 \sin^2 \theta$ ，每一片的面積是 $V_m^2 \sin^2 \theta d\theta$ ，累加所有切片的面積就是曲線所圍面積。

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{2\pi} V_m^2 \sin^2 \theta d\theta = V_m^2 \int_0^{2\pi} \left(\frac{1 - \cos 2\theta}{2} \right) d\theta \\ &= \frac{V_m^2}{2} \left(\theta - \frac{1}{2} \sin 2\theta \right) \Big|_0^{2\pi} = \frac{V_m^2}{2} \cdot 2\pi = \pi V_m^2 \end{aligned}$$

以上積分為高二數學範圍，現在將 A 除以週期 $T=2\pi$ ，再開根號，則為 V_{eff} 。

$$V_{eff} = \sqrt{\frac{A}{2\pi}} = \sqrt{\frac{\pi V_m^2}{2\pi}} = \frac{V_m}{\sqrt{2}} \quad \text{(公式8-3b)}$$

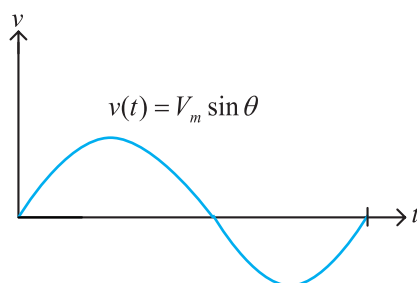


圖 8-3c

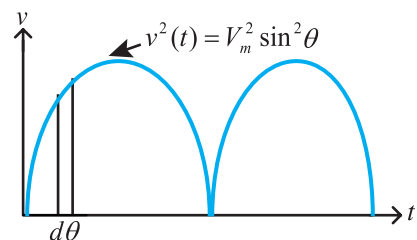


圖 8-3d

有效值又稱為均方根值 (root-mean square, rms)，rms 代表先平方 (square)，再取平均 (mean)，最後再開根號 (root)。若用三用電表的 ACV 檔位所測的交流電電壓，即為有效值。電力公司供應的 110V，也是有效值，也就是電力公司供電的 $V_m = 110\sqrt{2} = 156V$ 。若使用示波器量測，將可得 $V_m \div 156V$ 的正弦波。

以上積分為高二數學課程，本書使用 Python 程式證明 $V_m = 1$ 的有效值是 $1/\sqrt{2} \div 0.707$ ，程式如下：

```

import math as m
print(1/(2**(1/2)))#0.707
dsi=0.001
pi=m.pi
si=0
a=0
vm=1
while si<=2*pi:
    a=a+(vm*m.sin(si))*2*dsi #累加每一小片面積
    si=si+dsi
print((a/(2*pi))*(1/2))#0.707

```

方波

方波 (square wave) 是一種正、負半週波形對稱、時間相等 ($t_1=t_2$) 的交流波形，從 0 到正峰值屬於瞬間垂直上升、從正峰值到負峰值則屬於垂直下降，如圖 8-3e 所示。

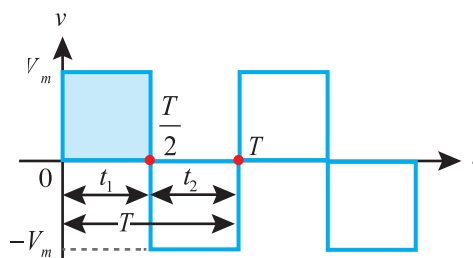


圖 8-3e 方波

方波屬於對稱波形，平均值也是 0。所以方波值取正半週計算平均值，其平均值是：

$$V_{av}=V_m$$

(公式8-3c)

有效值則是：

$$V_{eff}=\sqrt{\frac{V_m^2 \cdot \frac{T}{2} + (-V_m)^2 \cdot \frac{T}{2}}{T}} = \sqrt{V_m^2} = V_m$$

(公式8-3d)

三角波

三角波 (triangular wave) 是一種正、負半週波形對稱，上升時間 t_1 與下降時間 t_2 相等的交流波形，如圖 8-3f 所示。

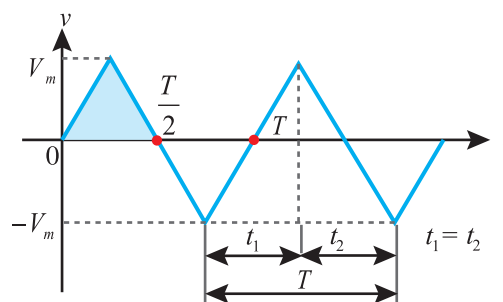


圖 8-3f 三角波

三角波的平均值也是 0。所以依照定義，取正半週，計算如下：

$$V_{av} = \frac{(\frac{T}{2} \cdot V_m) / 2}{\frac{T}{2}} = \frac{V_m}{2} \quad \text{(公式8-3e)}$$

任意三角波如圖 8-3g，公式 8-3e 上升時間 $v(t)=mt$ ，求有效值的 3 個步驟分別是平方、取平均、再開根號，所以，三角波的有效值：

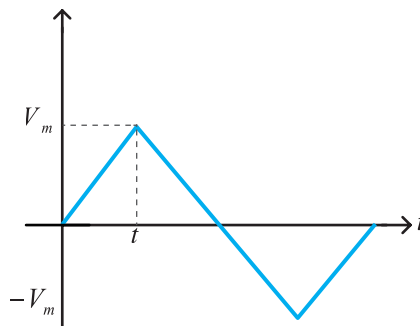


圖 8-3g 三角波有效值

$$V_{eff} = V_{rms} = \sqrt{\frac{\int_0^t m^2 t^2 dt}{t}} = \sqrt{\frac{m^2 \frac{1}{3} t^3 \Big|_0^t}{t}} = \sqrt{\frac{m^2 \frac{1}{3} t^3}{t}} = \frac{mt}{\sqrt{3}} = \frac{V_m}{\sqrt{3}} \quad \text{(公式8-3f)}$$

(此積分是高二課程)

範例8-3a

如圖 (1) 所示週期性電流信號 $i(t)$ ，該信號之平均值 I_{av} 及有效值 I_{rms} 分別為何？ 統測 110

- (A) $I_{av} = 1 \text{ A}$ ， $I_{rms} = \sqrt{7} \text{ A}$
 (B) $I_{av} = \sqrt{7} \text{ A}$ ， $I_{rms} = 1 \text{ A}$
 (C) $I_{av} = 2 \text{ A}$ ， $I_{rms} = 2\sqrt{7} \text{ A}$
 (D) $I_{av} = 2\sqrt{7} \text{ A}$ ， $I_{rms} = 2 \text{ A}$

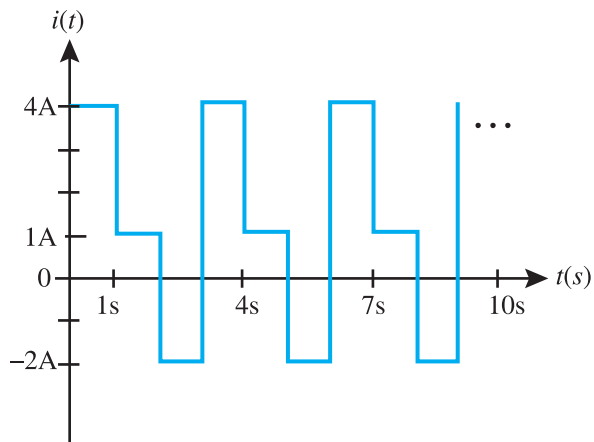


圖 (1)

解

1. 一個週期是 3 秒， $I_{av} = \frac{4 \times 1 \times 1 \times 1 + (-2) \times 1}{3} = \frac{3}{3} = 1\text{A}$
2. 依據有效值的定義： $I_{rms} = \sqrt{\frac{4^2 \times 1 + 1^2 \times 1 + (-2)^2 \times 1}{3}} = \sqrt{7}\text{A}$

自我練習

1. 如圖 (2) 所示之週期性電壓 $v(t)$ ，若 $V_p = 10\text{V}$ 、 $T = 5\text{ms}$ 、 $t_1 = 3\text{ms}$ ，則 $v(t)$ 之工作週期 D (duty cycle) 與電壓平均值 V_{av} 分別為何？（註：duty cycle 是高二電子學範圍）

統測 112

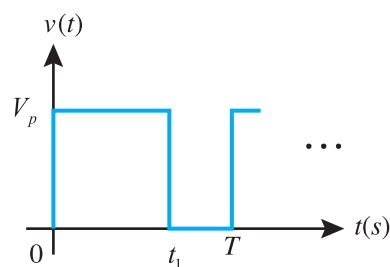


圖 (2)

- (A) $D = 3\text{ms}$ 、 $V_{av} = 6\text{V}$
 - (B) $D = 60\%$ 、 $V_{av} = 6\text{V}$
 - (C) $D = 2\text{ms}$ 、 $V_{av} = 4\text{V}$
 - (D) $D = 40\%$ 、 $V_{av} = 4\text{V}$
2. 如圖 (3) 所示為電壓 $v(t)$ 之週期性波形，則其有效值約為多少伏特？ 統測 107

- (A) $\sqrt{65.33}$
- (B) $\sqrt{54.67}$
- (C) $\sqrt{32.67}$
- (D) $\sqrt{21.78}$

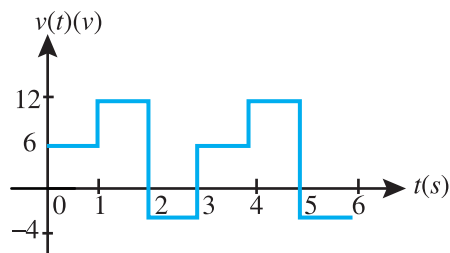
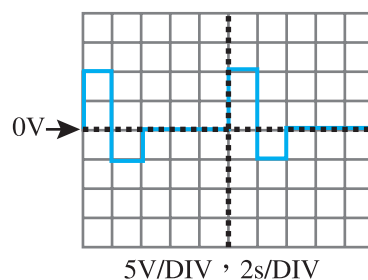


圖 (3)

3. 如圖 (4) 所示的電壓波形，其平均值為 V_1 ，有效值為 V_2 ，則 V_2/V_1 的比值為何？

統測 109



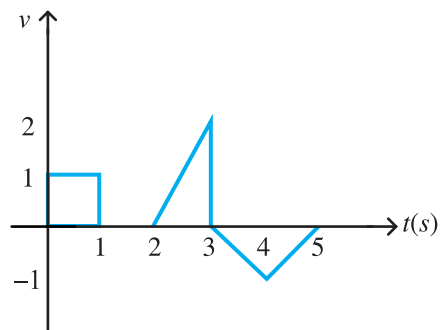
5V/DIV, 2s/DIV

圖 (4)

- (A) 1
- (B) 2
- (C) 5
- (D) 10

範例8-3b

如圖(1)所示電壓波形圖，週期是5秒，試計算平均值及有效值。



圖(1)

解

1. 一個週期是5秒，計算其面積。

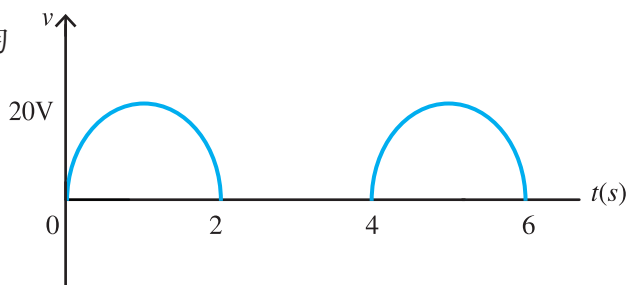
$$V_{av} = \frac{1 \times 1 + (2 \times 1)/2 + (-1 \times 2)/2}{5} = 0.2V$$

2. 方波依據公式 8-3d，三角波依據公式 8-3f：

$$V_{rms} = \sqrt{\frac{1^2 \times 1 + \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2 \times 1 + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 \times 2}{5}} = \sqrt{\frac{1 + \frac{4}{3} + \frac{2}{3}}{5}} = \frac{\sqrt{15}}{5}V$$

範例8-3c

波形如圖(1)所示，試計算平均值及有效值。



圖(1)

解

1. 依據公式 8-3a，最大值為 V_m ，週期為 π 的正弦波正半週面積是 $2V_m$ ，現在週期是 2，依據等比例定理，所以面積為 $\frac{2}{\pi} \cdot 2V_m$

$$V_{av} = \frac{\frac{2}{\pi} \cdot 2V_m}{T} = \frac{\frac{2}{\pi} \cdot 2 \cdot 20}{4} = \frac{20}{\pi} \text{V}$$

2. 依據公式 8-3b，正弦波的有效值是 $\frac{V_m}{\sqrt{2}}$ ，所以取平方乘以時間、累加、再開根號：

$$V_{rms} = \sqrt{\frac{\left(\frac{V_m}{\sqrt{2}}\right)^2 \cdot 2 + 0}{4}} = \sqrt{\frac{\left(\frac{20}{\sqrt{2}}\right)^2 \cdot 2}{4}} = 10\text{V}$$

自我練習

1. 電壓 $v(t) = 6 + 8\sqrt{2}\sin(10t)$ V，則其有效值 V_{rms} 與平均值 V_{av} 之比值 (V_{rms} / V_{av}) 約為何？
統測 111
(A) 1.67 (B) 1.41 (C) 1.34 (D) 1.11
2. $v(t) = 5 + 6\sin(377t - 30^\circ) + 8\sin(3 \cdot 377t)$ V 的有效值。
普考 93
(A) $5\sqrt{2.5}$ V (B) $19/\sqrt{2}$ V (C) $5\sqrt{3}$ V (D) 19V
3. 有一週期性電壓波形，其週期為 20ms，每一週期中有 10ms 的固定直流電壓 100V，5ms 的固定直流電壓 -40V 及 5ms 的 0V 電壓，請問此電壓波形之平均值為何？
統測 105
(A) 100V (B) 70V (C) 50V (D) 40V

波峰因素與波形因素

波峰因素 (crest factor) 與波形因素 (form factor)，前者用來描述波形是否尖銳，若需要瞬間大的啟動電流，可以選用波峰因素大的波形。後者用來描述變壓器能量的轉換率。兩者都與有效值有關，其定義分別如下：

$$\text{波峰因素} = \frac{\text{最大值}}{\text{有效值}} \quad (\text{強調峰值，所以分子是最大值})$$

$$\text{波形因素} = \frac{\text{有效值}}{\text{平均值}} \quad (\text{強調能量的轉換率，所以分子是有效值})$$

**自我練習**

1. 請計算正弦波的波峰因素與波形因素。
2. 請計算方波的波峰因素與波形因素。
3. 請計算三角波的波峰因素與波形因素。

8-4 頻率、週期

頻率

在一重覆循環的事件，每秒重覆的次數，稱為頻率（frequency，符號是 f ），單位是赫茲（Hertz，簡寫為 Hz）。例如，台電供電頻率是 60Hz，代表每秒送來 60 個正弦波。

週期

在一重覆循環的事件，每一個事件所花的時間，稱為週期（period，符號是 T ），單位是秒（s）。

$$T = \frac{1}{f} (\text{s})$$

（公式 8-4a）

例如，台電供電頻率是 60Hz，表示 1 秒內來了 60 個正弦波，每個正弦波的時間是

$$T = \frac{1}{60} \doteq 0.0166\text{s}$$

角度與弧度

角度 (angle) 通常以希臘字母 θ 表示，其單位有角度 (degree, $^\circ$) 與弧度 (radian, rad) 兩種。角度可簡稱「度」，單位符號是「 $^\circ$ 」，稱為「度度量」，弧度可簡稱「弧」，單位符號也是「弧」或「rad」，稱為「弧度度量」。如圖 8-4a 所示，一個圓有 360 度 ($^\circ$) 或稱為 2π 弧 (rad)。同樣的， $\sin \theta$ 正弦波的週期也可以用 360 度或 2π 弧來表示；換言之， $360^\circ = 2\pi$ 弧，亦即 1π 弧 = 180° 。數學的三角函數通常以度度量表示，但電機、與電腦程式的角度，通常以弧度度量表示。因此，在將以人類習慣的度度量三角函數交給電腦計算，計算前要先轉為弧度，等電腦算出對應角度時，也要再轉回度度量角度。度度量轉弧度的轉換公式如下：

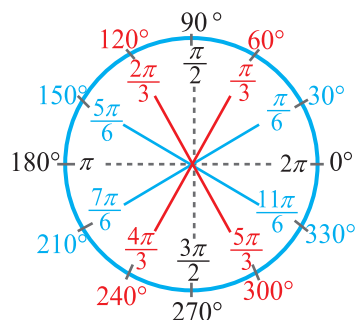


圖 8-4a 角度與弧度的轉換

$$\theta_{\text{弧度}} = \frac{\pi}{180^\circ} \times \theta_{\text{角度}} (\text{角度}, \text{rad})$$

(公式8-4b)

弧度轉角度的公式如下：

$$\theta_{\text{角度}} = \frac{180^\circ}{\pi} \times \theta_{\text{弧度}} (\text{角度}, ^\circ)$$

(公式8-4c)

角速度

速度是指單位時間所經過的距離。但是在電機中，線圈在磁場中是繞著圓周旋轉的。因此在計算速度時，是指單位時間（秒）所移動的角度，同樣道理，電機領域通常也是以弧度來表示，此稱為角速度（angular velocity），其符號為 ω （小寫的希臘字母讀做 omega），如圖 8-4b 所示。以公式表示為：

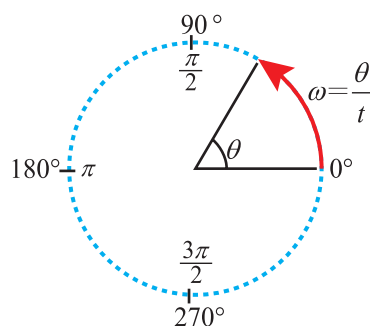


圖 8-4b 角速度

$$\text{角速度} = \frac{\text{弧度}}{\text{時間}} \quad \text{即} \quad \omega = \frac{\theta}{t} (\text{弧度} / \text{秒}, \text{rad/s})$$

(公式8-4d)

因為旋轉一週為 2π 弧度，所需時間為一個週期 T （秒）而言，則以上公式也可寫成

$$\text{角速度} \quad \omega = \frac{\theta}{t} = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f (\text{弧度} / \text{秒}, \text{rad/s})$$

(公式8-4e)

例如，台電公司的正弦波頻率是 60Hz，則其角速度為 $2\pi \times 60 \doteq 377 \text{rad/s}$ ，又例如，角速度是 377rad/s，從 0 弧度出發，經過 0.001 秒，則轉動了大約 0.377rad。

8-5 相位

正弦波

電力公司供電瞬時值如 8-1 節的圖 8-1g，此恰好與 $\sin \theta$ 函數正弦波相同，所以交流電瞬時值可以使用 $\sin \theta$ 函數表示如下

$$v(t) = V_m \sin(\theta + \omega t)$$

(公式8-5a)

以上函數的結果如圖 8-5a，各參數說明如下：

ω ： ω 是角速度， ωt 是移動的角度，單位是徑。

θ ：是 $t=0$ 的相位角，本例為 0，範例 8-5c、8-5d 有進一步說明。

f ：是發電機轉動的頻率，單位是 Hz(週 / s)，台電是 60Hz。

V_m ：是發電機輸出最大值，波形變化一週中的最大波幅。

V_{p-p} ：峰對峰值，波形一週中，波峰與波谷之值。

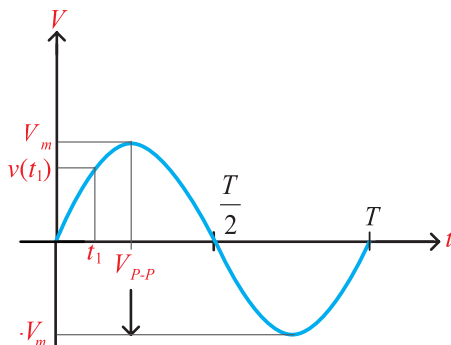


圖 8-5a 交流電瞬時值與最大值 V_m 、 V_{p-p} 關係圖

$\sin \theta$ 與 $\cos \theta$ 的相位關係

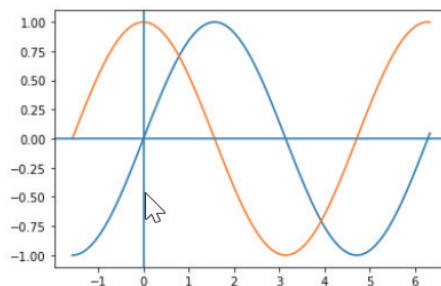
以下程式可同時繪出 $\sin \theta$ 與 $\cos \theta$ 函數圖，執行結果如圖 8-5b。

```
import matplotlib.pyplot as plt
#載入繪圖 matplotlib.pyplot 模組，才能繪圖
import numpy as np #載入numpy 模組，繪圖用數值模組
```

```

si = np.arange(-np.pi/2, 2*np.pi+0.1,
0.1)
#產生 0到2pi數列，以si串列儲存
y1 =np.sin(si) #逐一產生sin(si)正弦波值
y2=np.cos(si)
y3=np.sin(si+np.pi/2)
plt.plot(si,y1)#繪出正弦波 sin
plt.plot(si,y2)#繪出餘弦波 cos
#plt.plot(si,y3)#將sin往前移pi/2
plt.axhline(y=0)#繪出y軸
plt.axvline(x=0)#繪出x軸
plt.show()#於螢幕輸出圖形

```

圖 8-5b 藍色是 $\sin \theta$ ，橘紅色是 $\cos \theta$

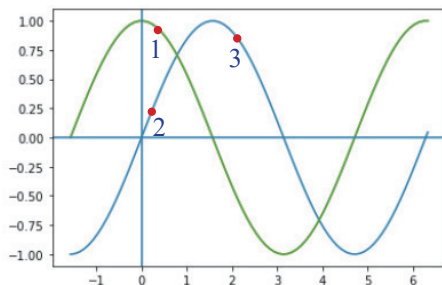
以下程式是將 $\sin \theta$ 往前移 $\pi/2$ (90°)。

```

y3=np.sin(si+np.pi/2)
plt.plot(si,y1)#繪出正弦波 sin
plt.plot(si,y3)#將sin往前移pi/2

```

我們發現 $\sin \theta$ 往前移 $\pi/2$ (90°) 與 $\cos \theta$ 相同，如圖 8-5c。

圖 8-5c 將 $\sin \theta$ 往前移 $\pi/2$

現在假設一個任意 θ ，此任意 θ 的 $\cos \theta$ 值在圖 8-5c 的位置 1，此任意 θ 的 $\sin \theta$ 值將會在位置 2，若將位置 2 的 $\theta + 90^\circ$ ，則 $\sin(\theta + 90^\circ)$ 的值，將會在位置 3，此與位置 1 的 $\cos \theta$ 值相同，所以我們得到 $\sin \theta$ 與 $\cos \theta$ 關係是 $\cos \theta$ 超前 $\sin \theta$ 90° ，此關係以方程式表示，則為：

$$\cos \theta = \sin(\theta + 90^\circ)$$

(公式8-5b)

此一關係請理解後熟記，因為以下章節的函數波有可能使用正弦波與餘弦波來表示，但不論是相位的比較或波形值的運算，我們將會統一使用

正弦波來計算，所以如果看到餘弦波，請將其角度加上 90° ，然後使用 $\sin \theta$ 取代。例如， $v(t)=20 \cos(314t-60^\circ)$ 此為餘弦波，請將角度直接加 90° ，轉為正弦波，所以 $v(t)=20 \sin(314t-60^\circ+90^\circ)=20 \sin(314t+30^\circ)$ 。

相位差的比較

兩個波形的方程式，要比較其相位關係時，必須考慮下列要項：

1. 頻率要相同；即 ω 或 f 值必須一樣，否則無法比較其相位。
2. 正、負號要相同；否則必須經過三角函數的轉換。

例如： $-\sin \theta = \sin(\theta \pm 180^\circ)$

(公式8-5c)

$-\cos \theta = \cos(\theta \pm 180^\circ)$

(公式8-5d)

補充說明：圖 8-5b，藍色是 $\sin \theta$ ， $-\sin \theta$ 就是將 $\sin \theta$ 往前，或往後移動 180° ，所以 $-\sin \theta = \sin(\theta \pm 180^\circ)$ ；同理 $-\cos \theta$ ，也是將 $\cos \theta$ 往前，或往後移 180° 的結果，所以 $-\cos \theta = \cos(\theta \pm 180^\circ)$ 。相位懂了，對於學習三角函數也會突然都懂了。

3. 函數 ($\sin \theta$ 、 $\cos \theta$) 要相同；否則必須經過三角函數的轉換。例如，我們統一採用 $\sin \theta$ 。看到 $\cos \theta$ ，則將其加上 90° ，轉為 $\sin \theta$ ：

$$\cos \theta = \sin(\theta + 90^\circ)$$

範例8-5a

已知台電公司瞬間輸出最大值為 160V 的正弦波，頻率是 60Hz，假設時間 $t=0$ 時電壓為 0V，請寫一程式，可以輸出台電任一瞬間的電壓值。

實習步驟

1. 因為電力公司發電機輸出恰好與 $\sin(\theta)$ 正弦波相同，所以台電公司瞬時值可以表示如下。

$$\begin{aligned} V &= V_m \sin(\theta + \omega t) \quad (t=0 \text{ 時，本例 } \theta=0) \\ &= V_m \sin(\omega t) \end{aligned}$$

2. 撰寫程式如下：

```
import math as ma #載入math模組，才能
求sin(x)含數值
t=0
Vm=160
f=60
pi=3.14
dt=0.001
while True:
    v=Vm*ma.sin(2*pi*f*t)
    print(v)
    t=t+dt
```

```
9.248041738130627
67.37233472198135
116.04386123517807
148.43369697460597
159.99734226514312
149.11234422695767
117.30593721980965
```

圖 (1)

3. 以上輸出結果如圖 (1)，由圖 (1) 可知其輸出電壓介於 $-160\sim 160\text{V}$ 之間。
4. 以下程式可繪出 $t = 0\sim 0.033(2.1/60)$ 秒之間的瞬時電壓值，其結果如圖 (2)，因為 1 秒來 60 個正弦波，1 個正弦波需要 $1/60$ 秒，本例繪出 2.1 個，所以時間取 $2.1/60$ ，這樣可得兩個正弦波再多一點點。

```
import matplotlib.pyplot as plt
#載入繪圖模組
import numpy as np #載入numpy 模組
Vm=160
f=60
pi=3.14
dt=0.001
#1秒來60個正弦波，1個正弦波需要1/60秒
#本例繪出兩個，所以時間取 2.1/60
t = np.arange(0, 2.1/60, 0.001)
# t為串列，其值從0到2/60，dx=0.001
y=Vm*np.sin(2*pi*f*t)#計算每一個x對應
的y值，y也是串列
plt.plot(t,y)#繪出函數圖形
plt.axhline(y=0)#繪出x軸
plt.axvline(x=0)#繪出y軸
plt.show() #於視窗輸出圖形
```

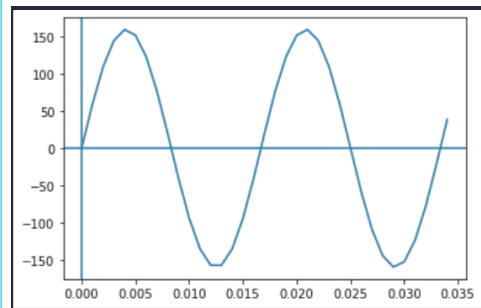


圖 (2)

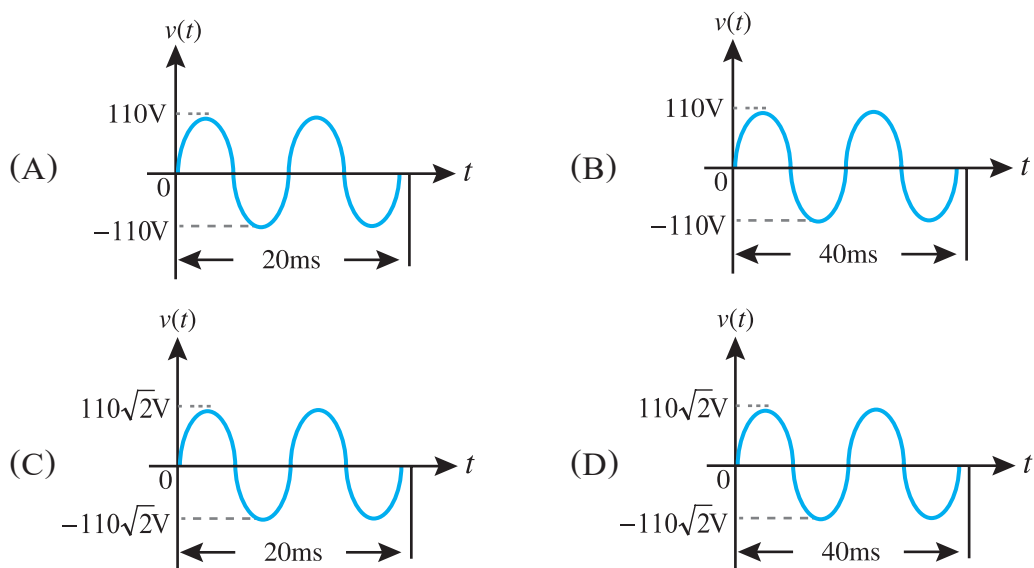
5. 將 110V / 60Hz 的市電電壓以交流電壓瞬間值方程式 $v(t)$ 表示時，下列何者正確？ 統測 100

(A) $v(t)=110\sin(60t)\text{V}$ (B) $v(t)=110\sin(377t)\text{V}$

(C) $v(t)=156\sin(60t)\text{V}$ (D) $v(t)=156\sin(377t)\text{V}$

範例8-5b

有一部 8 極的正弦波發電機，線圈轉速為 750rpm，若輸出電壓的有效值為 110V，則其輸出電壓波形為何？ 統測 109



解

- 2 極發電機如 8-1 節圖 8-1f，代表封閉線圈在 1 個 N 與 1 個 S 極所形成的磁場轉動，每轉 1 週可以得到 1 個正弦波。8 極發電機表示有 4 對 N 與 S 極磁場，所以線圈轉 1 週，可以得到 4 個正弦波。
- rpm 是每分鐘的轉速，除以 60 得到每秒的轉速。750rpm=12.5rps
- 每秒轉 12.5 週，代表可以得到 $12.5 \times 4 = 50\text{Hz}$ 正弦波。
- $T = \frac{1}{f} = \frac{1}{50} = 0.02 = 20\text{ms}$ （轉一週需要 20ms）
- 有效值 110V，代表最大值 $V_m = 110\sqrt{2}\text{V}$
- 題目故意畫 2 個正弦波，所以轉 2 週是 40ms，答案選 D。

相位角(phase angle)

前面範例 8-5a，時間為 0 時，其電壓為 0。但有時候 $t=0$ 時，電壓不會為 0，如範例 8-5c 與 8-5d，其波形我們稱為超前或落後 θ 角度，其超前或落後的程度，我們通常以角度 θ 表示，其值在 $-180^\circ \sim 180^\circ$ 之間，我們稱此為相位角，請看以下範例說明。

範例8-5c

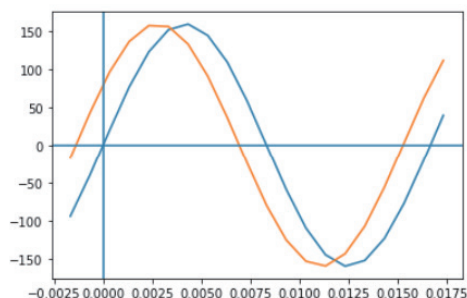
相位角的計算。

前面範例 8-5a 關於台電瞬時值的計算，我們假設時間 $t=0$ 時電壓為 0V，所以其相位角我們取 0。但若 $t=0$ 時電壓為 80V，請寫一程式，(1) 可以計算其相位角 (2) 可以繪出波形。

操作步驟

1. 因為 $t=0$ 時電壓為 80V，最大值為 160V，所以 $80 = 160\sin(\theta)$ ，此時 $\theta = \arcsin(80/160) = 30^\circ$ （此即 $t=0$ 時，封閉線圈所在位置）
2. 以上 $\arcsin(x)$ 是 $\sin(x)$ 的反函數，請複習範例 8-2b，請鍵入以下程式。

```
import matplotlib.pyplot as plt #載入繪圖模組
import numpy as np #載入numph 模組
Vm=160
V=80
print(np.arcsin(V/Vm)*180/np.pi) #使用numpy 模組
f=60
pi=np.pi
dt=0.001
#1秒來60個正弦波，1個正弦波需要1/60秒
#本例繪出一個，所以時間取 1.1/60
si=np.arcsin(V/Vm) #徑度量
print(si*180/pi) #度度量30
t = np.arange(-0.1/60, 1.1/60, 0.001)
#t為串列，其值從-0.1/60到1.1/60，dx=0.001
y1=Vm*np.sin(2*pi*f*t) #計算每一個x對應的y1值，y1也是串列
```



圖(1) 橘紅色 y_2 超前藍色 y_1 30°


```

y2=Vm*np.sin(si+2*pi*f*t)#計算每一個x對
應的y2值，y2也是串列
plt.plot(t,y1) #繪出函數圖形,藍色
plt.plot(t,y2) #繪出函數圖形,橘色
plt.axhline(y=0)#繪出x軸
plt.axvline(x=0)#繪出y軸
plt.show() #於視窗輸出圖形

```

3. 以上程式輸出結果如圖 (1)，請留意 $t=0$ 時，電壓為 80V，要 $t=0$ 時，電壓就有 80V，表示信號要提早出發，所以稱為「超前」。
4. 由圖 (1) 可知，因為 x 軸是時間軸，橘紅色的波形比藍色波形提早出發，此稱為波形超前，且超前 30° ，也就是 $t=0$ ，相位角是 30° 。

範例8-5d

相位角的計算二。

前面範例 8-5a 關於台電瞬時值的計算，我們假設時間 $t=0$ 時電壓為 0V，所以其相位角我們取 0，但若 $t=0$ 時電壓為 $-80\sqrt{3}$ V，請寫一程式，(1)可以計算其相位角 (2) 可以繪出波形。

操作步驟

1. 因為 $t=0$ 時電壓為 $-80\sqrt{3}$ V，最大值為 160V，所以 $-80\sqrt{3} = 160\sin(\theta)$ ，此時 $\theta = \arcsin(-80\sqrt{3}/160) = -60^\circ$
2. 本例程式同範例 8-5c，但是修改 V_m 如下：

$$V = -80 \times 1.732 \text{ V}$$

3. 程式執行結果如圖 (1)，請留意 $t=0$ 時，電壓為 $-80\sqrt{3}$ V，表示信號要落後出發，所以稱為「落後」。

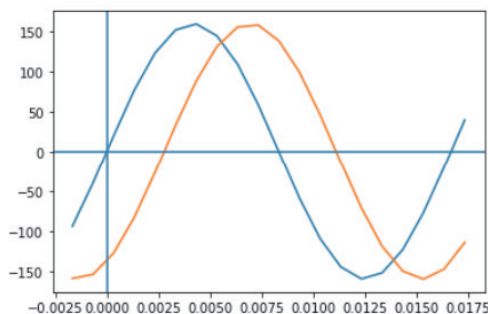


圖 (1) 本例橘紅色 y_2 落後藍色 y_1 60°

4. 由圖(1)可知，因為 x 軸是時間軸，橘紅色的波形比藍色波形落後出發，此稱為波形落後，且落後 60° ，也就是說 $t=0$ 時的相位角是 -60° 。

範例8-5e

若正弦波電壓信號 $v(t) = 0.1\sin(1000\pi t)\text{V}$ ，則下列敘述何者正確？ 統測 108

- (A) 有效值為 0.1V (B) 平均值為 0.05V
(C) 頻率為 500Hz (D) 時間 $t=0.01$ 秒時，其電壓值為 0.1V

解

A. $v(t) = 0.1\sin(1000\pi t)\text{V} \Rightarrow V_m = 0.1, \omega = 1000\pi$

$$V_m = 0.1 \Rightarrow V_{rms} = \frac{V_m}{\sqrt{2}} = \frac{0.1}{\sqrt{2}} \doteq 0.07\text{V}$$

B. 依據正弦波平均值公式 $V_{av} = \frac{2V_m}{\pi} = \frac{2 \cdot 0.1}{3.14} \doteq 0.063\text{V}$

C. $2\pi f = \omega = 1000\pi \Rightarrow f = 500\text{Hz}$ ，選(C)。

D. $v(0.01) = 0.1\sin(1000\pi \cdot 0.01) = 0.1\sin(10\pi) = 0\text{V}$ (π 的整數倍 $\sin\theta$ 都是 0)

自我練習

1. 若 $v(t) = 100\sqrt{2}\sin(157t - 30^\circ)\text{V}$ ，則 $v(t)$ 的頻率與有效值分別為何？

- (A) 50Hz ， 120V (B) 25Hz ， 120V
(C) 50Hz ， 100V (D) 25Hz ， 100V

範例8-5f

有一 60Hz 之弦波電壓源，當 $t=100/9$ 毫秒時電壓達到最小值 -110V ，則當 t 為下列何者時，此電壓源之瞬間電壓為零？ 統測 108

- (A) 0 秒 (B) $1/115$ 秒 (C) $1/144$ 秒 (D) $1/181$ 秒

解

(1) 寫出電壓方程式： $v(t) = V_m \sin(2\pi ft)$

(2) $f = 60 \Rightarrow T = \frac{1}{60}\text{s}$ (轉一圈要 $\frac{1}{60}\text{s}$)

(3) $t = \frac{100}{9} \text{ ms} = \frac{0.1}{9} \text{ s} = \frac{1}{90} \text{ s}$ 是最小值 -1 ，由 $\sin \theta$ 函數圖形

(請看圖 8-2b) 可知， $t \pm \frac{1}{4}T$ 都可以讓 $\sin \theta$ 為 0

$$\frac{1}{90} \pm \frac{1}{4} \times \frac{1}{60}$$

嘗試計算 $\frac{1}{90} - \frac{1}{4} \times \frac{1}{60} = \frac{150}{90 \times 240} = \frac{1}{144} \text{ s}$ ，所答案是(C)

自我練習

1. 有一交流電壓為 $v(t) = 220\sqrt{2} \sin(377t - 45^\circ) \text{ V}$ ，試求在 $t = \frac{1}{240}$ 秒時之瞬間電壓值約為多少伏特？

統測 106

(A)220 (B)200 (C)150 (D)110

範例8-5g

兩個電壓時間函數 $v_1(t)$ 與 $v_2(t)$ ，若 $v_1(t)$ 的相位超前 $v_2(t)$ 為 60° ，則下列何者正確？

統測 112

- (A) $v_1(t) = 20 \sin(314t - 30^\circ) \text{ V}$ 、 $v_2(t) = 20 \cos(314t - 60^\circ) \text{ V}$
 (B) $v_1(t) = 20 \cos(314t - 60^\circ) \text{ V}$ 、 $v_2(t) = 20 \sin(314t - 30^\circ) \text{ V}$
 (C) $v_1(t) = 20 \sin(314t - 30^\circ) \text{ V}$ 、 $v_2(t) = 20 \sin(314t - 60^\circ) \text{ V}$
 (D) $v_1(t) = 20 \cos(314t - 30^\circ) \text{ V}$ 、 $v_2(t) = 20 \sin(314t - 60^\circ) \text{ V}$

解

1. 題目同時出現 $\sin \theta$ 與 $\cos \theta$ 函數，這樣無法比較相位，我們一律將 $\cos \theta$ 加 90° 轉為 $\sin \theta$ 函數，以答案 B 為例

$$v_1(t) = 20 \cos(314t - 60^\circ) \text{ V} = 20 \sin(314t - 60^\circ + 90^\circ) \text{ V} = 20 \sin(314t + 30^\circ) \text{ V}$$

$$v_2(t) = 20 \sin(314t - 30^\circ) \text{ V}，都是 \sin \theta，才能比較相位$$

$$\text{所以 } v_1(t) \text{ 超前 } v_2(t) = 30^\circ - (-30^\circ) = 60^\circ$$

自我練習

1. 兩電壓 $v_1(t) = 80 \cos(20\pi t + 13^\circ) \text{ V}$ 及 $v_2(t) = 4 \sin(20\pi t + 45^\circ) \text{ V}$ ，則兩電壓之相位差為多少度？

統測 104

(A)58 (B)45 (C)32 (D)13



2. 若電壓 $v(t) = 50 \sin(\omega t + 45^\circ) \text{V}$ ，電流 $i(t) = 10 \cos(\omega t - 45^\circ) \text{A}$ ，則下列何者正確？統測 100
- (A) v 領先 i 90° (B) v 落後 i 90° (C) v 領先 i 180° (D) v 與 i 同相

8-6 相量運算

純量(scalar)與向量(vector)

只需要數值的大小來描述的量，稱為純量，例如，溫度、體重、長度等物理量。有些物理量則與方向有關，此稱為向量，例如，施力、重力、電力、磁力等物理量。以人類拉車的施力為例，就有很多方向，如圖 8-6a。現在要讓車子移動，不只要施力，還要考慮方向；方向若錯誤，車子也不會移動，例如施力 1 與 2，車子都可移動，但施力 3，再大的施力，車子也不會移動。所以，與施力有關的物理量——施力、重力、電力、磁力等，都需要同時使用大小與方向來描述，此稱為向量。以下我們將介紹向量的表示與向量的運算，後續介紹交流電，就能依此運算規則運算。

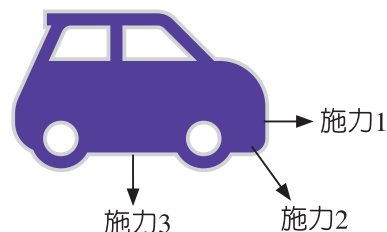


圖 8-6a

向量的表示

國中數學曾經定義平面的二維座標系統，水平線為 x 軸，垂直線為 y 軸，點的標示為 $A(x,y)$ ，所以座標以 $(3,4)$ 來標示，如圖 8-6b。現在要強調由 $(0,0)$ 往 $(3,4)$ 方向拉，我們稱此為向量 $\vec{A}(3,4)$ 。但為了方便後續向量的運算，我們並不以此種方式表示，而是以 $\vec{A}=3+4i$ （直角坐標）或 $\vec{A}=5\angle 53^\circ$ （極座標）表示。 $\vec{A}$ 的上面加上直線，強調此為向量，且用一個簡單符號加號 (+) 或角度符號 ($\angle$) 連結兩個數字，我們稱為複數 (complex number，代表兩個數字的連結)。

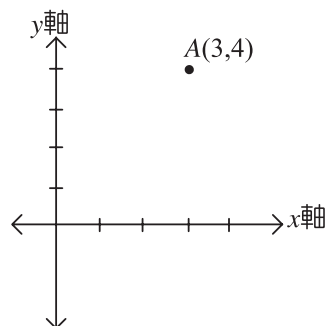


圖 8-6b

複數平面

在複數的領域裡，我們將水平線改稱實軸，以 R 表示；垂直線改稱虛軸，以 i 表示，如圖 8-6c。但為了能滿足複數的運算，我們定義， $i*i=-1$ ，因為 $i=\sqrt{-1}$ 是不存在的數，所以我們定義此 i 為虛數

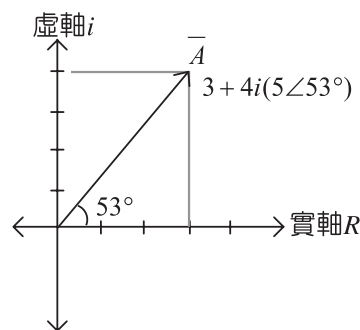


圖 8-6c

(imaginary number)，有別以 1,2,3,4 等實際存在的數字（因為任何實數的平方都是正數，例如， $2^2=4$ ， $(-2)^2=4$ ，都是正數，所以 $i*i=-1$ 不存在，因為不存在，所以稱為虛數）。雖然 i 不存在，但卻可以協助向量的加、減、乘、除等運算，以下是 i 的定義與次方運算結果：

$$i = \sqrt{-1}$$

$$i^2 = -1$$

$$i^3 = i^2 \cdot i = -i$$

$$i^4 = i^2 \cdot i^2 = 1$$

$$i^5 = i^4 \cdot i = i$$

本節後面會介紹，每一次「 $*i$ 」代表向左旋轉 90° 。

複數的表示

複數的表示有直角坐標的 $\bar{A} = 3 + 4i$ 與極座標的 $\bar{A} = 5 \angle 53^\circ$ ，分別說明如下：

✎ 直角坐標(rectangular coordinates)

直角坐標是將座標原點往座標 (x,y) 的施力以 $x + yi$ 表示。例如由座標 $(0,0)$ 往座標 $(3,4)$ 的向量表示為 $3 + 4i$ 。但是在電學領域裡，此 i 剛好與電流 i 相同，為了不混淆，改以 j 表示，且將 j 寫在數字的前面所以改寫為 $3 + j4$ （有些書或領域，例如 Python 程式語言把 j 寫在後面，採用 $3 + 4j$ ，請自己留意）。

✎ 極座標(polar coordinates)

極座標是以長度 r （與原點的長度）與角度 θ （與實軸 R 的角度）表示，中間以 $\angle$ 連結，符號是 $r \angle \theta$ 。例如 $3 + j4$ 如圖 8-6d，其長度為 5，角度為 53° ，所以我們以 $5 \angle 53^\circ$ 表示（ 53° 是特別角，邊長比是 3：4：5）。由直角坐標轉極座標公式如下：

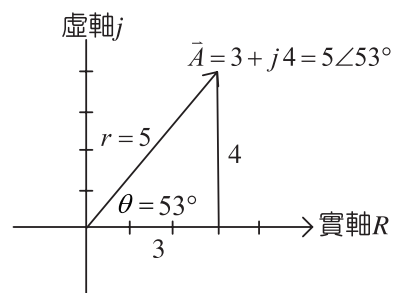


圖 8-6d

$\bar{A} = a + jb$ 令等於 $r\angle\theta$ ，則

$$r = \sqrt{a^2 + b^2} \quad (\text{公式8-6a})$$

$$\theta = \tan^{-1} \frac{b}{a} \quad (\text{公式8-6b})$$

以上 r, θ 如圖 8-6e。

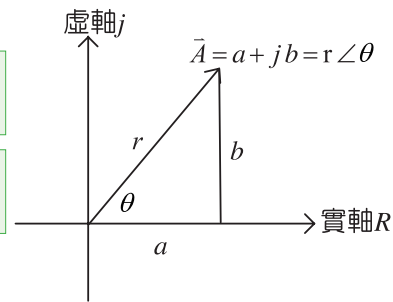


圖 8-6e

以上除非是特別角，否則要使用工程計算機求解 θ 。但因為電腦日益普及，我們建議使用電腦程式取代工程計算機。使用電腦程式的最大優點是，程式可重複使用，且結果有一致性。因為若使用工程計算機，則通常需要按兩次，若兩次結果都相同，才代表結果正確。但使用電腦程式計算，只要檢查程式是否正確，若程式正確，則所有計算都相同，且程式可儲存，往後可重複使用。電腦程式有很多種，因為 Python 不用規定資料型態，且容錯能力強，本書推薦使用 Python。以上直角坐標轉向量的 Python 程式如下：

```
import math as ma
pi=ma.pi
print(pi) #3.14159
a=3
b=4
r=(a*a+b*b)**(1/2)
print(r) #5
si=ma.atan2(b,a)#徑度量，得到對應θ
print(si) #0.927
si=si*180/pi #轉為度度量
print(si) #53
print(" /A=%d°%d" % (r,si)) #/A=5°53
```

```
3.141592653589793
5.0
0.9272952180016122
53.13010235415598
/A=5°53
```

補充說明

1. 前面 8-1 節，我們使用 $\text{atan}(p)$ 反函數求角度，此 p 是 y/x 的值，且傳回值是 $-\pi/2 \sim \pi/2$ ，但是直角座標 (x,y) 轉極座標 $(r\angle\theta)$ 要傳回 $-\pi \sim \pi$ 的角度值，所以要使用 $\text{atan2}(y,x)$ 函數。

♂ 特別邊長比轉極座標

以上直角坐標轉極座標的運算，需要使用 $\text{atan2}()$ 反函數求角度。但考試不能用計算機，所以命題委員會選用特別角。因為在直角三角形裡，邊長比例若是 3:4:5、1:1: $\sqrt{2}$ 、或是 1: $\sqrt{3}$:2，如圖 8-6f。這些特殊邊長比的直角三角形，有特殊的角度對應。例如邊長比 3:4:5，其對應角將會是 $37^\circ:53^\circ:90^\circ$ ；邊長比 1:1: $\sqrt{2}$ ，其對應角將會是 $45^\circ:45^\circ:90^\circ$ ；邊長比 1: $\sqrt{3}$:2，其對應角將會是 $30^\circ:60^\circ:90^\circ$ 。圖 8-6g 的 $3+j4$ 、 $1-j$ 與 $1-j\sqrt{3}$ 等，都是特別邊長關係，都有特別角度對應，所以， $3+j4 = 5\angle 53^\circ$ ， $1-j = \sqrt{2}\angle -45^\circ$ ， $1-j\sqrt{3} = 2\angle -60^\circ$ 。(請留意向量繪圖時，可以先平移。)

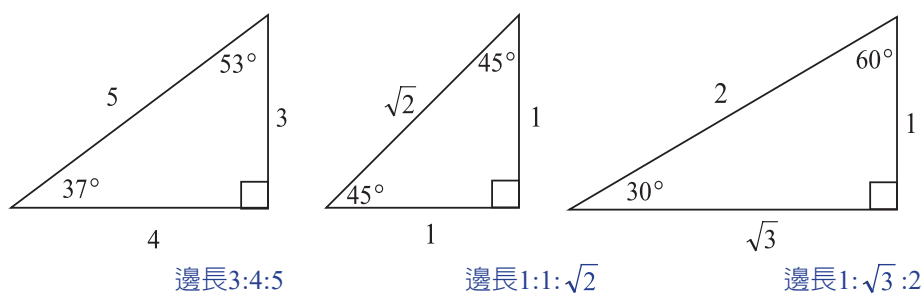


圖 8-6f 特別角三角形

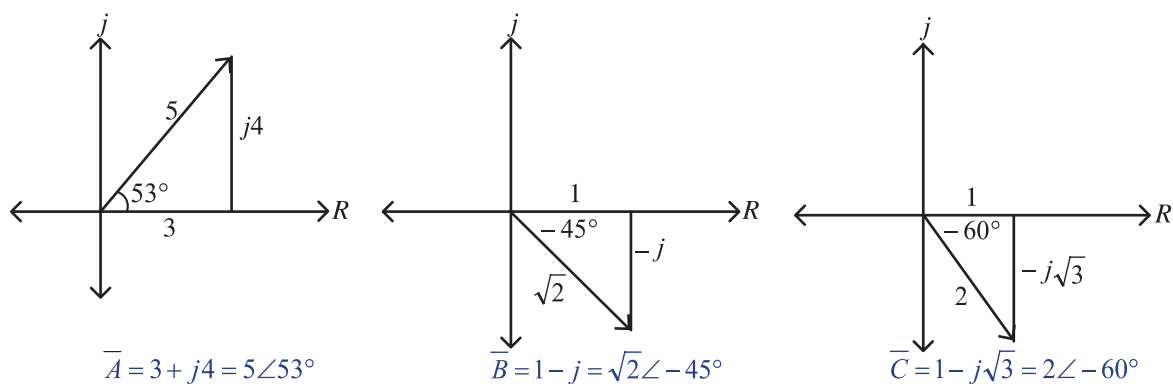


圖 8-6g

自我練習

1. 請將以下以直角坐標表示的向量在複數平面上標示，且寫出其極座標。

題號	直角坐標	極座標	題號	直角坐標	極座標
1.	$-3 + j4$		6.	$j3$	
2.	$-3 - j4$		7.	$-j3$	
3.	$3 - j4$		8.	$2 + j2$	
4.	4		9.	$1 + j\sqrt{3}$	
5.	-4		10.	$2\sqrt{3} - j2$	

極座標轉直角坐標

極座標轉直角坐標公式如下：

$$\bar{A} = r\angle\theta = a + jb$$

$$a = r\cos(\theta) \text{ (請留意 } a \text{ 是 } \theta \text{ 臨邊)}$$

(公式8-6c)

$$b = r\sin(\theta) \text{ (請留意 } b \text{ 是 } \theta \text{ 對邊，且善用特別角的邊長關係)}$$

(公式8-6d)

例如， $4\angle 60^\circ = a + jb$ 則

$$a = 4\cos 60^\circ = 4 \cdot \frac{1}{2} = 2$$

$$b = 4\sin 60^\circ = 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$$

以上任意角極座標轉直角坐標，需要使用計算機，但考試不能使用計算機，所以命題委員一定會使用 0° 、 30° 、 37° 、 45° 、 53° 、 60° 、 90° 等特別角，以下自我練習，請自行練習。

```
import math as ma
pi=ma.pi
r=5
si=53 #度度量
#人類採用度度量，但電腦採用徑度量
si=si/180*pi#轉為徑度量
a=round(r*ma.cos(si))#四捨五入
b=round(r*ma.sin(si))#四捨五入
print(a,b)
print(" /A=%d+%dj" % (a,b))
```

$$\frac{3}{4} / A = 3 + 4j$$

自我練習

1. 請將以下以極座標表示的向量在複數平面上標示，且寫出其直角座標，考試沒有計算機，以下都是特別角，請善用特別角的邊長關係。

題號	直角坐標	極座標	題號	直角坐標	極座標
1.	$5\angle 53^\circ$		5.	$6\angle 120^\circ$	
2.	$5\angle -53^\circ$		6.	$6\angle -60^\circ$	
3.	$5\angle 143^\circ$		7.	$8\angle 45^\circ$	
4.	$5\angle 127^\circ$		8.	$8\angle 135^\circ$	

複數的運算

以上我們已經介紹兩種複數的表示，分別是 $\bar{A}=3+j4$ （直角坐標）或 $\bar{B}=5\angle 53^\circ$ （極座標），現在則要分別介紹直角坐標與極座標兩個複數的加、減、乘、除等運算規則。

✎ 直角坐標

假設兩個複數分別是 $\bar{A}=a+jb$ ， $\bar{B}=c+jd$ ，則以上兩個複數的加、減、乘、除運算規則分別如下：

$$(1) \bar{A} + \bar{B} = (a+jb) + (c+jd) = (a+c) + j(b+d) \quad \text{（公式8-6e）}$$

$$(2) \bar{A} - \bar{B} = (a+jb) - (c+jd) = (a-c) + j(b-d) \quad \text{（公式8-6f）}$$

$$(3) \bar{A}\bar{B} = (a+jb)(c+jd) = ac + jad + jbc - bd = (ac - bd) + j(ad + bc) \quad \text{（公式8-6g）}$$

$$(4) \bar{A} / \bar{B} = \frac{a+jb}{c+jd} = \frac{(a+jb)(c-jd)}{(c+jd)(c-jd)} \quad (c-jd \text{ 稱為 } c+jd \text{ 的共軛複數，用來消除分母的虛部，讓分母變為實數})$$

$$\bar{A} / \bar{B} = \frac{ac + bd}{(c^2 + d^2)} + j \frac{bc - ad}{(c^2 + d^2)} \quad \text{（公式8-6h）}$$

以上計算，有點耗時，所幸，現在電腦非常普及，以上公式以 Python 程式完成如下：

```

def add(A,B):
    return (A[0]+B[0],A[1]+B[1])
def sub(A,B):
    return (A[0]-B[0],A[1]-B[1])
def mul(A,B):
    a=A[0];b=A[1]
    c=B[0];d=B[1]
    return (a*c-b*d,a*d+b*c)
def div(A,B):
    a=A[0];b=A[1]
    c=B[0];d=B[1]
    e=c*c+d*d
    return ((a*c+b*d)/e, ( b*c -a*d)/e)
A=[6,8] #list A[0]=6;A[1]=8,代表6+j8
B=[4,-3] #list B[0]=4;B[1]=-3,代表4-j3
C=add(A,B)

print(C)
print("%d+%jd"%(C[0],C[1])) #10+j5
C=sub(A,B)
print(C)
print("%d+%jd"%(C[0],C[1])) #2+j11
C=mul(A,B)
print(C)
print("%d+%jd"%(C[0],C[1]))#48+j14
C=div(A,B)
print(C)
print("%d+%jd"%(C[0],C[1])) #0+j2

```

```

(10, 5)
10+j5
(2, 11)
2+j11
(48, 14)
48+j14
(0.0, 2.0)
0+j2

```

自我練習

1. 假設 $\bar{A}=3+j4$ ， $\bar{B}=2-j$ ，請在複數平面標示此複數，求此兩個複數加、減後的結果，且標示相加與相減結果，使用直線連接這四個點，觀察其關係。(提示：本題希望學生體會平行四邊形的向量相加或相減)
2. 假設 $\bar{A}=3+j4$ ， $\bar{B}=j$ ，請在複數平面標示此複數 $\bar{A}$ 、計算兩個複數相乘除結果，標示兩個複數乘、除的結果。(提示：本題 $\bar{B}=1\angle 90^\circ$ ，請觀察角度的變化)
3. 假設 $\bar{A}=3+j4$ ， $\bar{B}=1+j$ ，請在複數平面標示此複數 $\bar{A}$ 、計算兩個複數相乘除結果，標示兩個複數乘、除的結果。(提示：本題 $\bar{B}=\sqrt{2}\angle 45^\circ$ ，請觀察大小與角度的變化)

極座標

假設 $\bar{A} = a\angle b$ ， $\bar{B} = c\angle d$ 則以上兩個相量的加、減、乘、除運算規則分別如下：

(1) $\bar{A} + \bar{B}$ 與 $\bar{A} - \bar{B}$ 極座標的加減法並沒有公式，只能先將極座標轉為直角坐標，然後相加減，再轉為極座標，以上過程，請看以下 Python 程式。

$$(2) \bar{A}\bar{B} = (a\angle b)(c\angle d) = ac\angle(b+d) \quad (\text{長度相乘，角度相加}) \quad (\text{公式8-6i})$$

$$(3) \frac{\bar{A}}{\bar{B}} = \frac{a\angle b}{c\angle d} = \frac{a}{c}\angle(b-d) \quad (\text{長度相除，角度相減}) \quad (\text{公式8-6j})$$

$$(4) (\bar{A})^m = a^m\angle mb \quad (\text{長度m次，角度m倍}) \quad (\text{公式8-6k})$$

$$(5) \sqrt[n]{\bar{A}} = \sqrt[n]{a}\angle\frac{b}{n} \quad (\text{長度開n次方，角度除以n}) \quad (\text{公式8-6l})$$

$$(6) \frac{1}{\bar{A}} = (\bar{A})^{-1} = (a\angle b)^{-1} = \frac{1}{a}\angle -b \quad (\text{長度倒數，角度取負}) \quad (\text{公式8-6m})$$

以上加、減、乘、除的 Python 程式如下：

```
import math as ma
pi=ma.pi
def add(A,B):
    #從列表取資料
    m=A[0];n=A[1]*pi/180
    p=B[0];q=B[1]*pi/180
    #轉直角坐標
    a=m*ma.cos(n);b=m*ma.sin(n)
    c=p*ma.cos(q);d=p*ma.sin(q)
    #相加
    e=a+c;f=b+d
    #轉極座標
    r=(e*e+f*f)**(1/2)
    si=ma.atan2(f,e)#徑度量
    si=round(si*180/pi) #轉為度度量
    return(r,si)
```

```
(5.0, -37)
相加：/C=5∠-37
(5.0, 37)
相減：/C=5∠37
(12, -90)
相乘：/C=12∠-90
(1.3333333333333333, 90)
相除：/C= 1.3∠90
```

```

def sub(A,B):
    m=A[0];n=A[1]*pi/180
    p=B[0];q=B[1]*pi/180
    #轉直角坐標
    a=m*ma.cos(n);b=m*ma.sin(n)
    c=p*ma.cos(q);d=p*ma.sin(q)
    #相減
    e=a-c;f=b-d
    #轉極座標
    r=(e*e+f*f)**(1/2)
    si=ma.atan2(f,e)#徑度量
    si=round(si*180/pi) #轉為度度量
    return(r,si)
def mul(A,B):
    a=A[0];b=A[1]
    c=B[0];d=B[1]
    #長度相乘
    e=a*c
    #角度相加
    f=b+d
    return(e,f)
def div(A,B):
    a=A[0];b=A[1]
    c=B[0];d=B[1]
    #長度相除
    e=a/c
    #角度相減
    f=b-d
    return(e,f)
A=[4,0]#list A[0]=4;A[1]=0
B=[3,-90]
C=add(A,B)
print(C)
print("相加：/C=%d∠%d" % (C[0],C[1]))

C=sub(A,B)
print(C)
print("相減：/C=%d∠%d"%(C[0],C[1]))

C=mul(A,B)
print(C)
print("相乘：/C=%d∠%d"%(C[0],C[1]))

C=div(A,B)
print(C)
print("相除：/C=%4.1f∠%d"%(C[0],C[1]))

```

由以上直角座標與極座標的加、減、乘、除運算，我們發現各有優缺點，直角坐標擅長進行加減法運算，極座標擅長乘除運算。也就是往後我們若要進行加減法，那就要以直角坐標表示，若要進行乘除法，那就以極座標表示，這樣才能事半功倍。

自我練習

（請分別使用人工與電腦求解）

題號	題目	求 $\bar{Z}$ （分母要實數）	求 $\bar{Z}$ 極座標
1	$\bar{Z} = (3+j) \times (3-j)$		
2	$\bar{Z} = 1/j$		
3	$\bar{Z} = 1/(3-j4)$		
4	$\bar{Z} = 1+1/j+1/(-j)$		
5	$\bar{Z} = 1+1/j2+1/(-j)$		
6	$\bar{Z} = (1+j4)+(2-j)$		
7	$\bar{Z} = (4+j3)/(3+j4)$		

特殊角極座標的加減法

向量若以極座標表示，若要進行加減法，原則上要先轉為直角坐標，然後相加減，再轉回極座標。但若是兩個向量相差 0° 、 90° 或 180° ，進行加法或減法，則可使用作圖法直接求解，請看以下範例說明。

範例8-6a

請計算以下極座標的運算：

1. $\bar{A} = 3\angle 53^\circ$ ， $\bar{B} = 6\angle 53^\circ$ ，求 $\bar{A} + \bar{B}$ ？
2. $\bar{A} = 5\angle 53^\circ$ ， $\bar{B} = 6\angle 233^\circ$ ，求 $\bar{A} + \bar{B}$ ？
3. $\bar{A} = 3\angle 53^\circ$ ， $\bar{B} = 5\angle 53^\circ$ ，求 $\bar{A} - \bar{B}$ ？
4. $\bar{A} = 3\angle 0^\circ$ ， $\bar{B} = 4\angle 90^\circ$ ，求 $\bar{A} + \bar{B}$ ？

解

1. $\vec{A} = 3\angle 53^\circ$, $\vec{B} = 6\angle 53^\circ$, 圖解如圖 (1), 兩個方向相同, 可直接相加, 所以是 $9\angle 53^\circ$ 。
2. $\vec{A} = 5\angle 53^\circ$, $\vec{B} = 6\angle 233^\circ$, 圖解如圖 (2), 兩個方向相反, 可直接相減 (施力反向視為抵銷), 所以是 $1\angle 233^\circ$ 。
3. $\vec{A} = 3\angle 53^\circ$, $\vec{B} = 5\angle 53^\circ$, 圖解如圖 (3), 兩個方向相同, 可直接相減, 所以是 $-2\angle 53^\circ$ 或 $2\angle 233^\circ$ 。
4. $\vec{A} = 3\angle 0^\circ$, $\vec{B} = 4\angle 90^\circ$, 圖解如圖 (4), 因為向量可平移, 所以將 $\vec{B}$ 向量平移, 平移後三角形為 $37^\circ - 53^\circ - 90^\circ$ 特別角, 所以合向量是 $5\angle 53^\circ$ 。

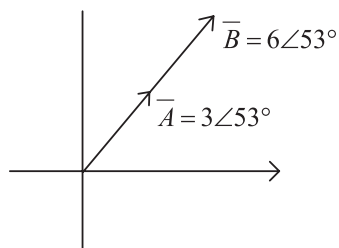


圖 (1)

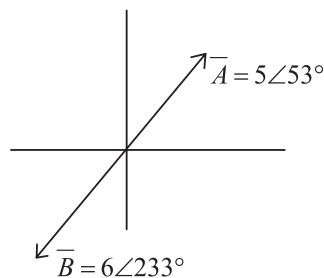


圖 (2)

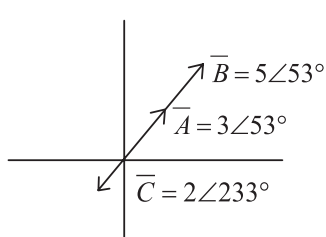


圖 (3)

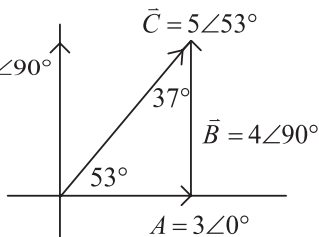


圖 (4)

自我練習

1. 求解以下向量的運算。
 - (1) $\vec{A} = 1\angle 0^\circ$, $\vec{B} = 1\angle -90^\circ$, 求 $\vec{A} + \vec{B} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。
 - (2) $\vec{A} = 1\angle 0^\circ$, $\vec{B} = 1\angle -90^\circ$, 求 $\vec{A} - \vec{B} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。
 - (3) $\vec{A} = 1\angle 0^\circ$, $\vec{B} = 2\angle 180^\circ$, 求 $\vec{A} - \vec{B} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。
 - (4) $\vec{A} = 1\angle 90^\circ$, $\vec{B} = 2\angle -90^\circ$, 求 $\vec{A} + \vec{B} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。
 - (5) $\vec{A} = 1\angle 0^\circ$, $\vec{B} = \sqrt{3}\angle -90^\circ$, 求 $\vec{A} - \vec{B} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。
 - (6) $\vec{A} = 6\angle 60^\circ$, $\vec{B} = 6\angle -60^\circ$, 求 $\vec{A} - \vec{B} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。
 - (7) $\vec{A} = 6\angle 60^\circ$, $\vec{B} = 6\angle -30^\circ$, 求 $\vec{A} - \vec{B} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

Python與複數

以上是基本電學教材關於複數的運算，現代的 Python 語言的資料型態已經有複數，例如，可以直接使用變數表示複數

```
a=3+4j #請留意Python複數的表示，是數字寫在j的前面
b=2-1j #j前的1不能省略
```

有了變數，就可以直接進行加、減、乘、除、轉為極座標等運算，請鍵入以下程式，寫出執行結果。

```
import math,cmath #載入math,cmath模組
a=3+4j
b=2-1j #j前的1不能省略
c1=a+b
print("c1:",c1)#_____
c2=a-b
print("c2:",c2)#_____
c3=a*b
print("c3:",c3)#_____
c4=a/b
print("c4:",c4)#_____
```

⌚ 直角坐標轉極座標

Python 有直角坐標轉極座標模組 `cmath`，請鍵入以下程式，寫出執行結果。

```
import cmath ,math
pi=math.pi
print(pi) #3.14159
Z=3+4j
r,si=cmath.polar(Z)#轉極座標
si=math.degrees(si) #轉為度度量
print(" /Z=%d∠%d" % (r,si)) #/A=5∠53
```


⚡ 係數為變數的複數

Python 的複數的係數若要以變數表示，則要以 `complex()` 函數轉換，例如：

```
a=3;b=-4
Z=complex(a,b)
print(Z)
```

也就是寫成以下樣式，Python 無法辨識

```
a=3;b=-4
Z=a-bj #錯誤的表示法
```

以下程式可將極座標轉為直角座標：

```
import math
r=5;si=53      #表示5∠53°
si=si/180*math.pi
a=r*math.cos(si)
b=r*math.sin(si)
z=complex(a,b)
print(z)
```

以下程式，可協助兩個極座標向量 ($r \angle \theta$) 的加法運算，乘、除及減法運算，請自己練習。鍵入以下程式，可以協助往後各章複數計算。

```
import math,cmath
ra=6;asi=60     #代表6∠60°
rb=6;bsi=-60    #代表6∠-60°
#將6∠60° 轉為直角座標
asi=asi/180*math.pi
a=ra*math.cos(asi)
b=ra*math.sin(asi)
za=complex(a,b)
print(za)
#將6∠-60° 轉為直角座標
bsi=bsi/180*math.pi
a=rb*math.cos(bsi)
b=rb*math.sin(bsi)
```

```

zb=complex(a,b)
print(zb)
zc=za+zb    #執行兩個複數相加
rc,csi=cmath.polar(zc)    #轉為極座標
csi=math.degrees(csi)    #將弧度量轉為角度量
print(" /C=%3.1f∠%3.1f"% (rc,csi))

```

自我練習

1. 請將範例 8-6a 的複數運算，使用以上程式驗算。
2. 請寫一程式，可以協助兩個極座標的加、減、乘、除運算，且運算結果以極座標表示。

以上複數的計算，對於往後串、並聯交流電路阻抗、三相電源的計算非常方便。這樣才能聚焦基本電學的學習，而不是同時學數學也學基本電學。

相量(phasor)與向量

直流電路的元件只有電阻，通過電阻的電流與輸入的電壓沒有任何相位差。但在交流電路裡，交流電路新增電容與電感，通過電容、電感的電流與輸入電壓將會有相位角的落差，此一相位角的落差剛好可以使用向量計算。因為是處理相位角的向量計算，所以在電學領域裡，我們將「向量」改稱為「相量」，強調此為相位角的計算，但也都遵守向量運算規則。

正弦式與相量式轉換

在 8-5 節「交流波形的相位」中，交流正弦波方程式為： $v(t) = V_m \sin(\omega t \pm \theta)$ ，以這樣的表示式來進行歐姆定律或電功率的計算時，會十分複雜，請看範例 8-6b。因此，必須先將「正弦波方程式」轉換成「相量式」，再進行運算比較方便，必要時再轉換回正弦波方程式即可。

交流相量式是「將正弦波方程式取其有效值為大小，以及相位角 θ 為角度組合而成的表示方式」，相當於向量的極座標表示式。交流正弦波的電壓方程式為： $v(t) = V_m \sin(\omega t \pm \theta)$ ，則其相量式為

$$\bar{V} = \frac{V_m}{\sqrt{2}} \angle \pm \theta$$

也就是進行相量運算時，角速度先不理會，但最後運算結果轉回正弦式時，再將角速度放回去。以上是正弦式轉為相量式的方法，若訊號以餘弦式表示時，請統一轉為正弦式。

範例8-6b

有兩個交流電壓分別為 $v_1(t) = 30\sqrt{2} \cos(377t - 45^\circ)$ V 和

$v_2(t) = 30\sqrt{2} \cos(377t - 135^\circ)$ V 則 $v_1(t) + v_2(t)$ 為何？

統測 106

(A) $60\sqrt{2} \cos(377t - 175^\circ)$ V

(B) $60\sqrt{2} \sin(377t + 90^\circ)$ V

(C) $60 \cos(377t + 45^\circ)$ V

(D) $60 \sin(377t)$ V

解

1. 本例訊號源以餘弦式表示，我們先轉為正弦式如下：

$$v_1(t) = 30\sqrt{2} \sin(377t - 45^\circ + 90^\circ) \text{ V} \Rightarrow v_1(t) = 30\sqrt{2} \sin(377t + 45^\circ) \text{ V}$$

$$v_2(t) = 30\sqrt{2} \sin(377t - 135^\circ + 90^\circ) \text{ V} \Rightarrow v_2(t) = 30\sqrt{2} \sin(377t - 45^\circ) \text{ V}$$

2. 將正弦式轉為相量式如下：

$$\bar{V}_1 = \frac{30\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \angle 45^\circ \text{ V} = 30 \angle 45^\circ \text{ V}, \quad \bar{V}_2 = \frac{30\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \angle -45^\circ \text{ V} = 30 \angle -45^\circ \text{ V}$$

3. 相量式要相加，以直角坐標較便利，所以轉為直角坐標如下：

$$\bar{V}_1 = 30 \cos 45^\circ + j30 \sin 45^\circ = 30 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + j30 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 15\sqrt{2} + j15\sqrt{2} \text{ V}$$

$$\bar{V}_2 = 30 \cos(-45^\circ) + j30 \sin(-45^\circ) = 30 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + j30 \cdot \frac{-\sqrt{2}}{2} = 15\sqrt{2} - j15\sqrt{2} \text{ V}$$

4. 執行複數加法運算如下：

$$\bar{V} = \bar{V}_1 + \bar{V}_2 = 15\sqrt{2} + j15\sqrt{2} + 15\sqrt{2} - j15\sqrt{2} = 30\sqrt{2} \text{ V}$$

5. 將直角坐標轉回極座標的相量式。

$$\bar{V} = 30\sqrt{2} = 30\sqrt{2} \angle 0^\circ \text{ V} \quad (\text{此為 } V_{rms})$$

6. 將相量式轉為正弦式。向量式的大小是 V_{rms} ，轉為正弦式的最大值 V_m 要乘以 $\sqrt{2}$ 。所以

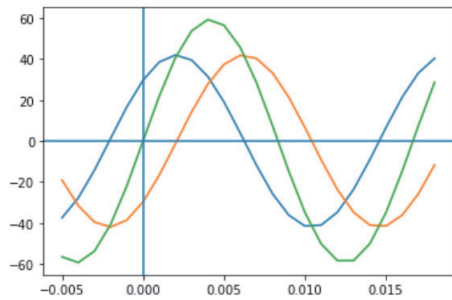
$$V_m = 30\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 60 \text{ V}$$

7. 將角速度放回去，得到

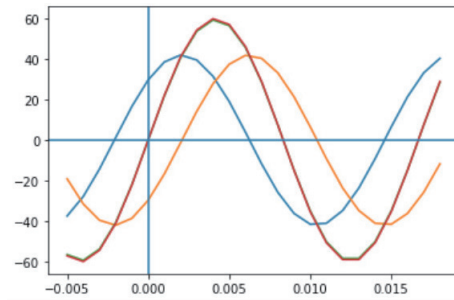
$$v(t) = 60\sin(377t) \text{ V}，\text{所以答案是(D)。}$$

8. 以下程式，我們使用循序法，將 $v_1(t)$ 與 $v_2(t)$ 一點一點逐一相加，然後繪出圖形，如圖 (1) 綠色線條。然後將使用相量運算的 $60\sin(377t)$ 也繪出圖形，如圖 (2) 的紅色線條。圖 (2) 的紅色線條與圖 (1) 的綠色線條相同，所以我們證明使用相量法與正弦式的結果相同。但是，正弦式使用逐一相加，只有計算機有此能力，使用人工至少要一天的時間。

```
import matplotlib.pyplot as plt #載入繪圖模組
import numpy as np #載入numph 模組
pi=np.pi
v1=30*1.4;v1si=-45 #度度量
v1si=(v1si/180)*pi #徑度量
v2=30*1.4;v2si=-135
v2si=(v2si/180)*pi #徑度量
v4=60;v4si=0
v4si=(v4si/180)*pi #徑度量
w=377;T=2*pi/w;dt=0.001
t = np.arange(-0.3*T, 1.1*T,dt) #
# t為串列，其值從-0.3到1.1*T，dt=0.001
y1=v1*np.cos(w*t+v1si)#
y2=v2*np.cos(w*t+v2si)#
y3=v1*np.cos(w*t+v1si)+v2*np.cos(w*t+v2si)
y4=v4*np.sin(w*t+v4si)#
plt.plot(t,y1) #繪出v1(t) 函數圖形, 藍色
plt.plot(t,y2) #繪出v2(t) 函數圖形, 橘色
plt.plot(t,y3) #繪出v1(t)+v2(t) 函數圖形, 綠色
plt.plot(t,y4) #繪出60sin(377t) 函數圖形, 紅色
plt.axhline(y=0) #繪出x軸
plt.axvline(x=0) #繪出y軸
plt.show() #於視窗輸出圖形
```



圖(1) 藍色是 $v_1(t)$ 、橘色是 $v_2(t)$ 、綠色是 $v_1(t)+v_2(t)$ 的結果



圖(2) 藍色是 $v_1(t)$ 、橘色是 $v_2(t)$ 、紅色是 $60\sin(377t)$ 的結果，兩者一致

自我練習

- 若 $i_1(t) = 4\sin(\omega t)$ A 的相量式為 $2\sqrt{2}\angle 0^\circ$ A，則 $i(t) = 10\cos(\omega t - 45^\circ)$ A 的相量式為何？統測104
 (A) $\bar{I} = 10\angle -45^\circ$ A (B) $\bar{I} = 10\angle 45^\circ$ A
 (C) $\bar{I} = 5\sqrt{2}\angle 45^\circ$ A (D) $\bar{I} = 5\sqrt{2}\angle -45^\circ$ A
- 已知電流 $i_1 = 50\sin(2000t)$ A、 $i_2 = 50\cos(2000t)$ A，若電流 $i_T = i_1 + i_2$ ，則下列敘述何者正確？統測 110
 (A) 電流 i_T 的相位領前電流 i_1 為 90°
 (B) 電流 i_T 的相位領前電流 i_2 為 90°
 (C) 電流 i_T 的相位領前電流 i_2 為 45°
 (D) 電流 i_T 的相位領前電流 i_1 為 45°
- 有一個交流電路的輸入電壓 $v(t) = 156\cos(377t - 30^\circ)$ V，輸入電流 $i(t) = 10\sin(377t + 30^\circ)$ A，請問兩者之相位關係為何？統測 105
 (A) 電壓 $v(t)$ 相角超前電流 $i(t)$ 相角 30°
 (B) 電壓 $v(t)$ 相角超前電流 $i(t)$ 相角 60°
 (C) 電流 $i(t)$ 相角超前電壓 $v(t)$ 相角 30°
 (D) 電流 $i(t)$ 相角超前電壓 $v(t)$ 相角 60°

範例8-6c

若 $\bar{A} = 64\angle 180^\circ$ ， $\bar{B} = \sqrt{2}\angle 45^\circ$ ，則 $\sqrt[4]{\bar{A}} + (\bar{B})^3 = ?$

統測 107

(A) $4\sqrt{2}\angle 45^\circ$ (B) $4\sqrt{2}\angle 135^\circ$ (C) $4\angle 90^\circ$ (D) $4\angle -90^\circ$

解

1. 依據公式 8-6k：

$$\bar{A} = r\angle\theta \Rightarrow (\bar{A})^m = r^m\angle m\theta$$

$$2. \quad \bar{A} = 64\angle 180^\circ \Rightarrow \sqrt[4]{\bar{A}} = \sqrt[4]{64}\angle \frac{180^\circ}{4} = 2\sqrt{2}\angle 45^\circ$$

$$\bar{B} = \sqrt{2}\angle 45^\circ \Rightarrow (\bar{B})^3 = (\sqrt{2})^3\angle 3\cdot 45^\circ = 2\sqrt{2}\angle 135^\circ$$

3. 複數的加法，以直角座標較便利，所以轉為直座標

$$\bar{A} = 2\sqrt{2}\cos 45^\circ + j2\sqrt{2}\sin 45^\circ = 2\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + j2\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 2 + j2$$

$$\bar{B} = 2\sqrt{2}\cos 135^\circ + j2\sqrt{2}\sin 135^\circ = 2\sqrt{2} \cdot \frac{-\sqrt{2}}{2} + j2\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = -2 + j2$$

4. 執行複數加法

$$\bar{A} + \bar{B} = 2 + j2 - 2 + j2 = j4$$

5. 轉回極座標

$$\bar{A} + \bar{B} = j4 = 4\angle 90^\circ, \text{ 答案選 (C)。}$$

6. 請鍵入以下程式，觀察執行結果。

```
import math,cmath
#副程式
def aa(ra,si):
    si=si/180*math.pi#度度量轉徑度量
    a=ra*math.cos(si)
    b=ra*math.sin(si)
    z=complex(a,b)#轉為複數
    return z
#主程式
ra=64;asi=180    #角度a在此修改
rb=2**(1/2);bsi=45 #角度b在此修改
za=aa(ra,asi) #轉直角坐標
```

```

zb=aa(rb,bsi) #轉直角坐標
zc=za**(1/4)+zb**(3); #複數運算
rc,csi=cmath.polar(zc) #轉極座標
csi=math.degrees(csi) #徑度量轉角度量
print("/C=%4.2f∠%3.1f"%(rc,csi))#/C=4.00∠90.0

```

自我練習

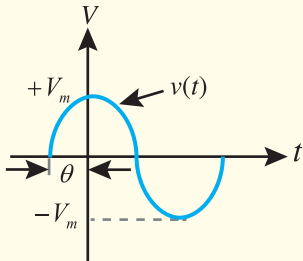
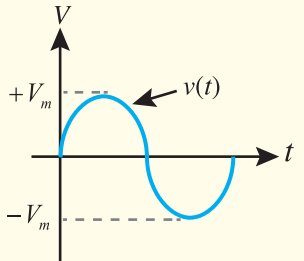
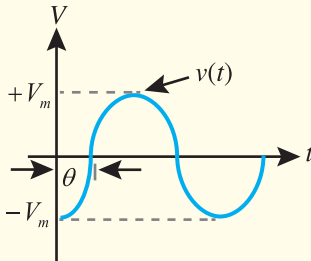
1. $\bar{A}=10\angle-30^\circ$ ， $\bar{B}=10\angle30^\circ$ ， $\bar{C}=j10$ ，求 $\frac{1}{\bar{A}+\bar{B}+\bar{C}}$ 為多少？（請以極座標表示）

8-7 本章內容摘要

1. 電力系統是由發電系統、輸供電系統、配電系統組成。
2. 各種波形的平均值與有效值。

波形	平均值	有效值
正弦波	$V_{av} = \frac{2}{\pi} V_m = 0.636V_m$	$V_{rms} = \frac{1}{\sqrt{2}} V_m = 0.707V_m$
方波	$V_{rms} = V_m$	$V_{av} = V_m$
三角波	$V_{av} = \frac{1}{2} V_m = 0.5V_m$	$V_{rms} = \frac{1}{\sqrt{3}} V_m = 0.577V_m$

3. 頻率 (f)：週期性波形，每一秒鐘所重覆出現的週數，單位為赫茲 (Hz) 或 (週 / 秒) 或 (次 / 秒)。
4. 週期 (T)：週期性波形，每完成一週所需的時間，單位為秒。週期是頻率倒數 $T = \frac{1}{f}$ 秒 (sec)。
5. 正弦波方程式為： $v(t) = V_m \sin(\omega t \pm \theta)$ ，有下列三種狀態：

$v(t) = V_m \sin(\omega t + \theta)$	$v(t) = V_m \sin \omega t$	$v(t) = V_m \sin(\omega t - \theta)$
 相位超前 θ	 相位角 0°	 相位落後 θ

6. 僅含大小的數字稱為純量。
7. 必須同時包含大小與方向的物理量稱為向量，向量本書在符號上加直線，例如， $\overline{A}$ 。
8. 複數包含實部與虛部，可用來記錄向量 $\overline{A}$ 。
9. 複數在高中職領域有兩種表示，分別是使用直角坐標的 $\overline{A} = a + jb$ 與極座標的 $\overline{A} = r \angle \theta$ 。

10. 直角坐標轉極座標公式： $\bar{A} = a + jb = r \angle \theta$ 。

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$$

11. 極座標轉直角坐標公式 $\bar{A} = r \angle \theta = a + jb$ 則 $a = r \cos \theta$ ， $b = r \sin \theta$ 。
12. 電學裡電壓與電流的大小與相位角運算剛好與向量運算規則相同，所以亦採用向量表示與運算，但為了表示此為相位角運算，所以改稱為相量運算。
13. 複數的加減法以直角坐標較方便，其運算方式為實部與虛部各自獨立運算，例如：

$$\bar{A} = a + jb, \bar{B} = c + jd$$

$$\bar{A} + \bar{B} = (a + c) + j(b + d)$$

$$\bar{A} - \bar{B} = (a - c) + j(b - d)$$

14. 複數乘除法以極座標較方便，其運算方式為大小相乘除，角度相加減，例如：

$$\bar{A} = a \angle b, \bar{B} = c \angle d$$

$$\bar{A} \cdot \bar{B} = (ac) \angle (b + d)$$

$$\frac{\bar{A}}{\bar{B}} = \frac{a}{c} \angle (b - d)$$

$$(\bar{A})^m = a^m \angle mb \quad (\text{長度}m\text{次，角度}m\text{倍})$$

$$\sqrt[n]{\bar{A}} = \sqrt[n]{a} \angle \frac{b}{n} \quad (\text{長度開}n\text{次方，角度除以}n)$$

$$\frac{1}{\bar{A}} = (\bar{A})^{-1} = (a \angle b)^{-1} = \frac{1}{a} \angle -b \quad (\text{長度倒數，角度取負})$$

15. 頻率的符號 f ，角速度的符號 ω ，兩者關係是 $\omega = 2\pi f$ 。
16. 頻率 f ，最大值電壓為 V_m 的正弦式表示法是 $v(t) = V_m \sin(2\pi ft + \theta)$ ， θ 是時間為零的相位角， $2\pi f$ 可用角速度 ω 代替 $v(t) = V_m \sin(\omega t + \theta)$ 。

17. 正弦式的數值代表最大值 V_m ，相量式的數值代表有效值 V_{rms} ，兩者的關係是 $V_{rms} = \frac{V_m}{\sqrt{2}}$ ；正弦式轉相量式，數值大小要先除以 $\sqrt{2}$ ，相量式轉正弦式則是乘以 $\sqrt{2}$ ：例如：

$v(t) = V_m \sin(\omega t + \theta)$ 轉為相量式

$$\bar{V} = \frac{V_m}{\sqrt{2}} \angle \theta = V_{rms} \angle \theta$$

8-8 課後習題

選擇題

- 有一個交流電路的輸入電壓 $v(t) = 156 \cos(377t - 30^\circ)$ V，輸入電流 $i(t) = 10 \sin(377t + 30^\circ)$ A，請問兩者之相位關係為何？ 統測 105

(A) 電壓 $v(t)$ 相角超前電流 $i(t)$ 相角 30°
 (B) 電壓 $v(t)$ 相角超前電流 $i(t)$ 相角 60°
 (C) 電壓 $i(t)$ 相角超前電流 $v(t)$ 相角 30°
 (D) 電壓 $i(t)$ 相角超前電流 $v(t)$ 相角 60°
- 兩電壓 $v_1(t) = 8 \cos(20\pi t + 13^\circ)$ V 及 $v_2(t) = 4 \sin(20\pi t + 45^\circ)$ V，則兩電壓之相位差為多少度？ 統測 104

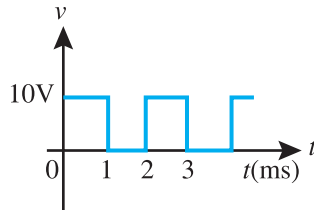
(A) 58 (B) 45 (C) 32 (D) 13
- 若 $v(t) = 100\sqrt{2} \sin(157t - 30^\circ)$ V，則 $v(t)$ 的頻率與有效值分別為何？ 統測 104

(A) 50Hz，120V (B) 25Hz，120V (C) 50Hz，100V (D) 25Hz，100V
- 如右圖所示之週期性電壓信號 v ，該信號的平均值電壓 V_{av} 及有效值電壓 V_{rms} 分別為何？ 統測 103

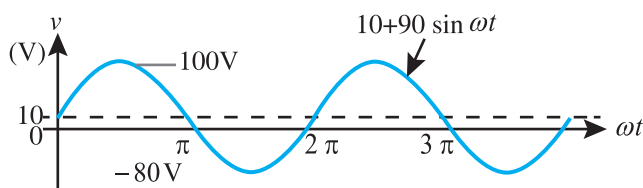
(A) $V_{av} = 5$ V， $V_{rms} = 10\sqrt{2}$ V
 (B) $V_{av} = 5$ V， $V_{rms} = 5$ V
 (C) $V_{av} = 5\sqrt{2}$ V， $V_{rms} = 5$ V
 (D) $V_{av} = 5$ V， $V_{rms} = 5\sqrt{2}$ V
- 兩電壓 $v_1(t) = 100\sqrt{2} \sin(377t + 30^\circ)$ V 及 $v_2(t) = 10\sqrt{2} \sin(377t - 60^\circ)$ V，下列有關該兩電壓相位關係的敘述，何者正確？ 統測 103

(A) v_2 的相位角與 v_1 同相
 (B) v_2 的相位角超前 v_1 為 90°
 (C) v_2 的相位角落後 v_1 為 90°
 (D) v_2 的相位角落後 v_1 為 60°
- 一交流電路輸入電壓為 $v(t) = 156 \cos(377t)$ V，輸入電流為 $i(t) = 10 \sin(377t + 45^\circ)$ A，請問電流相角後電壓相角幾度？ 台電 112

(A) 0° (B) 30° (C) 45° (D) 60°



7. 有一週期性的方波 $v(t)$ ，電壓峰值為 $\pm 100\text{ V}$ ，頻率為 10 kHz ，經理想全波整流後，其波形因數約為何？
身心障礙特考 112
(A) 0.707 (B) 1.0 (C) 1.414 (D) 1.57
8. 以振幅及餘弦 (cosine) 為基準的相量 (phasor) 式表示電流
 $i(t) = 6\cos(50t - 40^\circ)\text{ A}$ ，下列何者正確？
身心障礙特考 112
(A) $6\angle -40^\circ\text{ A}$ (B) $6\angle 40^\circ\text{ A}$ (C) $-6\angle -40^\circ\text{ A}$ (D) $-6\angle 40^\circ\text{ A}$
9. 有關複數的說明，下列何者錯誤？
初等考 112
(A) 複數平面包括實數軸及虛數軸
(B) 一複數轉換為共軛複數後，其實數值不變，相角不變
(C) 複數平面可用直角座標或極座標表示
(D) 共軛複數彼此相加，只會剩下實數值
10. 有兩個弦波電流分別是 $i_1 = 10\sqrt{2}\sin(100t + 45^\circ)\text{ A}$ 及 $i_2 = 30\sqrt{2}\cos(100t - 135^\circ)\text{ A}$ ，若以相量計算 $i_1 + i_2$ ，下列何者正確？
初等考 112
(A) $i_1 + i_2 = -28.28\sin(100t + 45^\circ)\text{ A}$
(B) $i_1 + i_2 = -28.28\sin(100t - 45^\circ)\text{ A}$
(C) $i_1 + i_2 = -44.72\sin(100t + 26.57^\circ)\text{ A}$
(D) $i_1 + i_2 = 44.72\sin(100t - 26.57^\circ)\text{ A}$
11. 如下圖示週期性電壓波形之有效值為何？
初等考 112



- (A) 63.6V (B) 64.42V (C) 70.7V (D) 80V
12. 現今的電力系統為何使用交流電而不使用直流電？
初等考 112
(A) 因為發電機只能發出交流電
(B) 因為變壓器只能對交流電升降壓
(C) 因為電線對交流電有較小的電阻
(D) 因為交流電較具安全性
13. 兩個弦波電壓分別是 $v_1 = 10\sqrt{2}\sin(100t + 45^\circ)\text{ V}$ 及 $v_2 = 20\sqrt{2}\cos(100t + 135^\circ)\text{ V}$ ，則 $v_1 + v_2$ 為下列何者？
鐵路特考 112
(A) $v_1 + v_2 = 10\sqrt{2}\sin(100t + 180^\circ)\text{ V}$

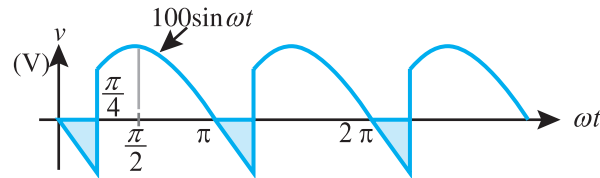
(B) $v_1 + v_2 = 10\sqrt{2} \sin(100t + 225^\circ) \text{ V}$

(C) $v_1 + v_2 = 30\sqrt{2} \sin(100t + 225^\circ) \text{ V}$

(D) $v_1 + v_2 = 30\sqrt{2} \sin(100t + 90^\circ) \text{ V}$

14. 下圖示週期性電波形之平均值約為何？

鐵路特考 112



(A) 45.02V (B) 54.34V (C) 63.66V (D) 70.7V

15. (1) 試求圖 1(a) 波形的有效值。

112 鐵路員級

(2) 試求圖 1(b) 波形的有效值，其中波形的幅度為 100， $\tau=3$ ， $T=12$ 。

(3) 求 $i(t) = 50 + 30 \sin \omega t \text{ A}$ 的有效值。

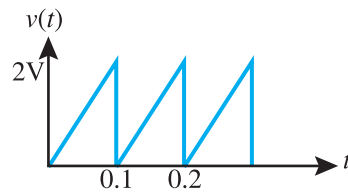


圖 1(a)

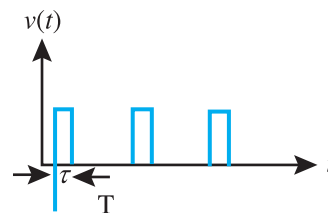


圖 1(b)

16. 某交流正弦電壓訊號的最大值為 V_{max} 、均方根值（有效值）為 V_{rms} 、平均值為 V_{ave} ，其波形因數 (form factor) 應為何？

自來水 111

(A) $\frac{V_{max}}{V_{rms}}$ (B) $\frac{V_{rms}}{V_{max}}$ (C) $\frac{V_{rms}}{V_{ave}}$ (D) $\frac{V_{ave}}{V_{rms}}$

17. 有一交流電路的電流為 $i(t) = 7.07 \sin(157t + 30^\circ) \text{ A}$ ，則該電流的頻率約為多少？

自來水 111

(A) 60Hz (B) 50Hz (C) 30Hz (D) 25Hz

18. 有一交流電流為 $i(t) = 20 \cos(\omega t - 30^\circ) \text{ A}$ ，此交流電流的向量表示方式為：

自來水 111

(A) $\vec{I} = 10\sqrt{2} \angle -30^\circ \text{ A}$ (B) $\vec{I} = 10\sqrt{2} \angle 60^\circ \text{ A}$
(C) $\vec{I} = 20 \angle -30^\circ \text{ A}$ (D) $\vec{I} = 20 \angle 60^\circ \text{ A}$

素養觀念題

1. 開啓示波器模擬程式 (<http://www.goodbooks.com.tw/elect/osc.exe>) 如圖 (1) 與圖 (2)，它可以幫助學生認識與學習示波器檔位與模擬執行結果。請問圖 (1) 的 $V_m = \underline{\hspace{2cm}}$ ， $T = \underline{\hspace{2cm}}$ ， $f = \underline{\hspace{2cm}}$ ，圖 (2) 的 $V_m = \underline{\hspace{2cm}}$ ， $T = \underline{\hspace{2cm}}$ ， $f = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

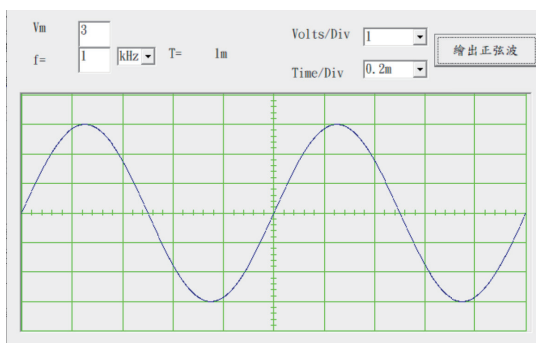


圖 (1)

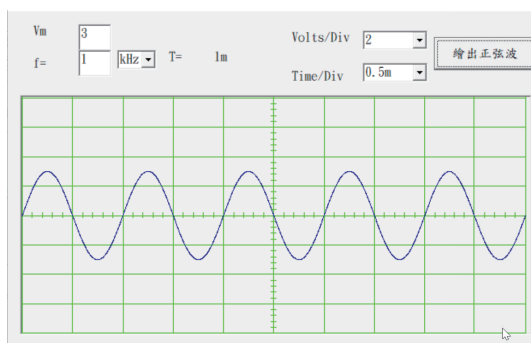


圖 (2)

2. 示波器圖形如圖 (3)，Voids/Div=5V，Time/Div=2ms，使用 10 倍衰減棒，請問 $V_m = \underline{\hspace{2cm}}$ ， $T = \underline{\hspace{2cm}}$ ， $f = \underline{\hspace{2cm}}$ 。
3. 示波器圖形如圖 (4)，Voids/Div=500mV，Time/Div=500 μ s 請問 $V_m = \underline{\hspace{2cm}}$ ， $T = \underline{\hspace{2cm}}$ ， $f = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

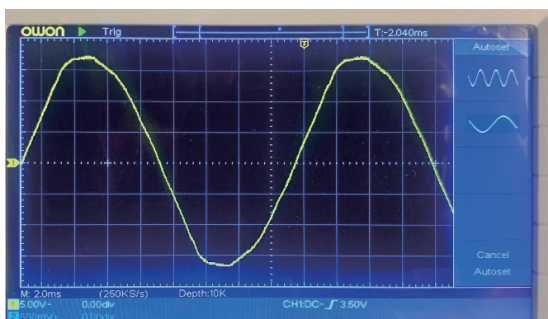


圖 (3)

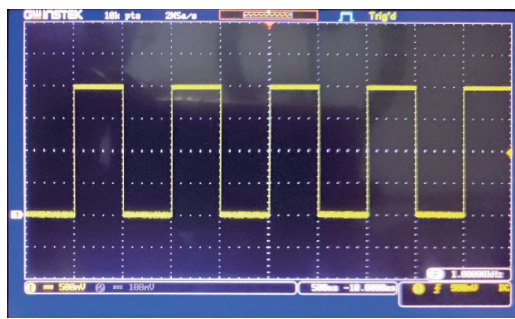


圖 (4)

4. 若有示波器畫面如圖 (5)，Volts/Div=2V，Time/Div=200 μ s，請問此波形 $V_m = \underline{\hspace{2cm}}$ ， $T = \underline{\hspace{2cm}}$ ， $f = \underline{\hspace{2cm}}$ 。
5. 若有示波器畫面如圖 (6)，黃色波形是 CH1，Volts/Div=2V，藍色波形是 CH2，Volts/Div=10mV Time/Div=200 μ s，請問藍色波形 $V_m = \underline{\hspace{2cm}}$ ， $V_{rms} = \underline{\hspace{2cm}}$ ， $T = \underline{\hspace{2cm}}$ ， $f = \underline{\hspace{2cm}}$ ，與黃色波形的相位差 = $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

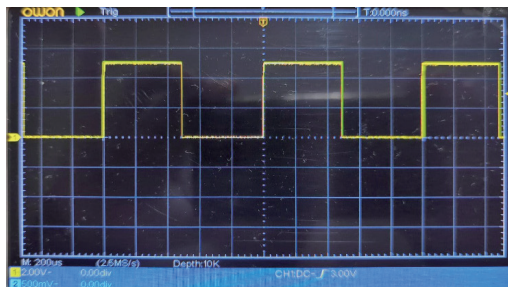


圖 (5)

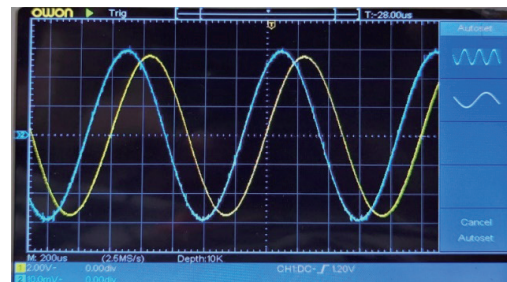


圖 (6)

MEMO

Chapter 09

基本交流電路



學習綱要

- 9-1 交流純電阻、純電容、純電感電路
- 9-2 電阻電容、電阻電感及電阻電感電容串聯電路
- 9-3 電阻電容、電阻電感及電阻電感電容並聯電路
- 9-4 電阻電感電容串並聯電路
- 9-5 本章內容摘要
- 9-6 課後習題

學習目標

- 1. 能計算純電阻、純電容、純電感元件的阻抗
- 2. 能計算電阻電容、電阻電感及電阻電感電容串聯電路的電流與電壓
- 3. 能計算電阻電容、電阻電感及電阻電感電容並聯電路的電流與電壓
- 4. 能計算電阻電容、電阻電感及電阻電感電容串並聯電路的電流與電壓

前面的電阻、電感、電容都是接到直流電，本章開始我們要探討電阻、電容、電感接到交流電的反應。首先，交流電的基本觀念與數學基礎已經在第八章介紹。本章我們將一步步探討以下內容：1. 純電阻、純電容、純電感交流電路。2. 電阻電容串聯、電阻電感串聯、電阻電容電感串聯等交流電路。3. 電阻電容並聯、電阻電感並聯、電阻電容電感並聯等交流電路。4. 電阻、電容、電感串並聯電路。

§9-1 交流純電阻、純電容、純電感電路

純電阻

交流電路裡，僅包含電阻者，稱為純電阻電路。例如，圖 9-1a 即為純電阻電路。

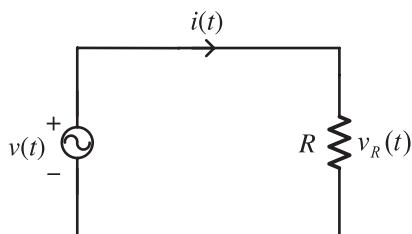


圖 9-1a 純電阻電路

⚡ 阻抗(impedance)

前面直流電路裡，電源電壓 V 與電源電流 I 的比值，依照歐姆定律，我們定義為 R 。但在交流電路裡，因為加入電容與電感等元件，所以有電容抗 (capacitive reactance，簡稱 $\bar{X}_C$ ，容抗)、有電感抗 (inductive reactance，簡稱 $\bar{X}_L$ ，感抗)，所以電源電壓 $\bar{V}$ 與電源電流 $\bar{I}$ 的比值改稱為阻抗 $\bar{Z}$ ，也就是阻抗 $\bar{Z}$ 包含電阻抗、電容抗、電感抗。（請留意本章開始都是相量，使用複數同時表示大小與相位角）

⚡ 電阻抗

純電阻電路，電阻端電壓與電流的比值，我們定義為電阻抗 (electrical impedance)，以符號 R 表示。圖 9-1b 電路裡，以示波器量測， $v_R(t)$ 與 $i(t)$ 的波形如圖 9-1c，CH1（黃色）是 $v_R(t)$ ，CH2（藍色）是 $i(t)$ 。（示波器的 CH1、CH2 都是量測電壓工具，但依據歐姆定

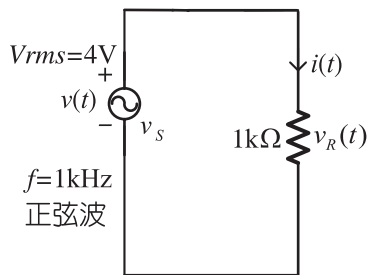
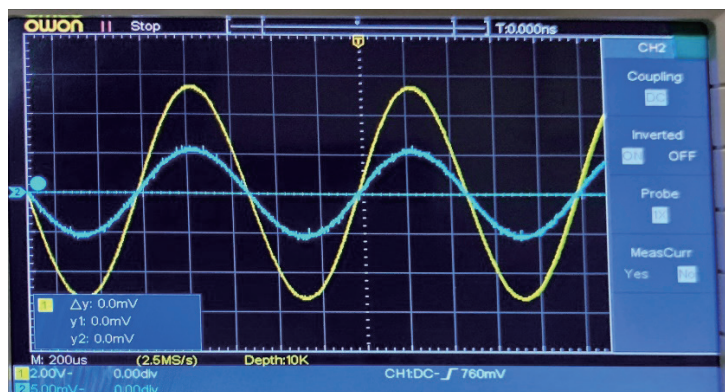


圖 9-1b

律， $I=V/R$ ，若取 1Ω 電阻與原電路串聯，量取 1Ω 電阻的電壓，則此電壓即代表 1Ω 電阻串聯點的電流。本書的電流量測，均採用此方式，請參考基本電學實習）

圖 9-1c $v_R(t)$ 與 $i(t)$ 的波形

信號產生器：
 $V_m=5.6\text{V}$ ， $f=1\text{kHz}$ ，正弦波。
 示波器：
 $T=200\mu\text{s} \times 5=1\text{ms}$ 。
 CH1(黃色 $v_R(t)$)：
 $V_1=2\text{V} \times 2.8=5.6$
 CH2(藍色 $i(t)$)：
 $V_2=5\text{mV} \times 1.1=5.5\text{mV}$
 與CH1同相。

1. 由圖 9-1c 可知，黃色波形 $v_R(t)=5.6\sin(2 \times 3.14 \times 1000 \times t)\text{V}$ ， $\bar{V} \doteq 4\angle 0^\circ \text{V}$ 。
2. 由圖 9-1c 可知，藍色波形 $i(t)=5.5\text{m}\sin(2 \times 3.14 \times 1000 \times t)\text{A}$ ， $\bar{I} \doteq 4\text{m}\angle 0^\circ \text{A}$ ，請留意兩者相位相同。
3. 依照歐姆定律，電路阻抗 $\bar{Z} = \bar{V} / \bar{I} = (4)/(4\text{m}) = 1\text{k}\angle 0^\circ \Omega$ ，此即為電路的阻抗值。
4. 經過科學家不斷的實驗，純電阻交流電路，電流大小與輸入電壓成正比，與 R 成反比，與頻率無關。依據歐姆定律， $\bar{Z} = \bar{V} / \bar{I}$ ，可求得純電阻電路的阻抗 $\bar{Z}$ 僅與其電阻本身電阻值 R 有關，與電源頻率無關，如公式 9-1a。

阻抗 $\bar{Z} = R$ (歐姆， Ω)

(公式9-1a)

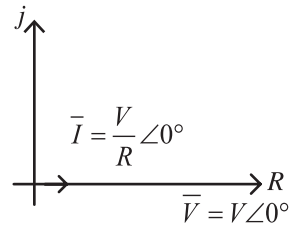
⚡ 電流

由 $v(t) = V_m \sin(\omega t)$ ，得到 $V = \frac{V_m}{\sqrt{2}}$ ，且相位角為 0，所以 $\bar{V} = V\angle 0^\circ$ 。依據歐姆定律，純電阻電路電流：

$$\bar{I} = \frac{\bar{V}}{R} = \frac{V\angle 0^\circ}{R} = \frac{V}{R}\angle 0^\circ$$

✎ $\bar{V}-\bar{I}$ 相量圖

由 $V = V_m \sin(\omega t)$ ， $\bar{V} = \frac{V_m}{\sqrt{2}} \angle 0^\circ = V \angle 0^\circ$ ， $\bar{I} = \frac{V}{R} \angle 0^\circ$ ，
，所以 $\bar{V}-\bar{I}$ 相量圖如圖 9-1d。

圖 9-1d $\bar{V}-\bar{I}$ 相量圖

範例9-1a

如圖 (1) 所示的純電阻交流電路，已知電壓源

$v(t) = 20\sqrt{2} \sin(200t + 60^\circ) \text{ V}$ ， $R = 10\Omega$ ，試求

(1) $\bar{V}$ (2) $v_R(t)$ (3) $\bar{V}_R$ (4) ω

(5) f (6) $\bar{I}$ (7) $i(t)$

(8) $\bar{V}-\bar{I}$ 相量圖

(9) 寫程式繪出 $v(t)$ 與 $i(t)$ 波形

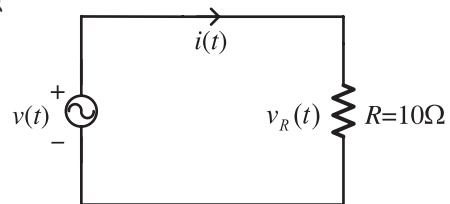


圖 (1) 電路圖

解

(1) 由於 $v(t) = 20\sqrt{2} \sin(200t + 60^\circ) \text{ V}$ ，求得 $\bar{V} = 20 \angle 60^\circ \text{ V}$ ， $\omega = 200 \text{ rad/s}$ 。

(2) 由克希荷夫電壓定律 $v_R(t) = v(t) = 20\sqrt{2} \sin(200t + 60^\circ) \text{ V}$ 。

(3) $\bar{V}_R = 20 \angle 60^\circ \text{ V}$ 。

(4) $\omega = 200 \text{ rad/s}$ 。

(5) 由 $2\pi f = \omega$ ，求得 $f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{200}{2 \cdot 3.14} \doteq 31.8 \text{ Hz}$ 。

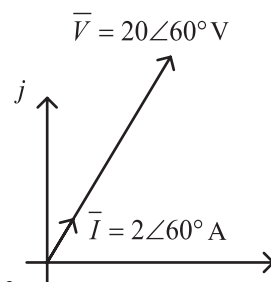
(6) 依據歐姆定律 $\bar{I} = \frac{\bar{V}}{Z} = \frac{\bar{V}}{R} = \frac{20 \angle 60^\circ}{10} = 2 \angle 60^\circ \text{ A}$ 。

(7) 將(6)的相量式轉回正弦式，得到：

$$i(t) = 2\sqrt{2} \sin(200t + 60^\circ) \text{ V}。$$

(8) 由 $\bar{V} = 20 \angle 60^\circ$ 、 $\bar{I} = 2 \angle 60^\circ$ ，繪出 $\bar{V}-\bar{I}$ 相量圖如圖 (2)。

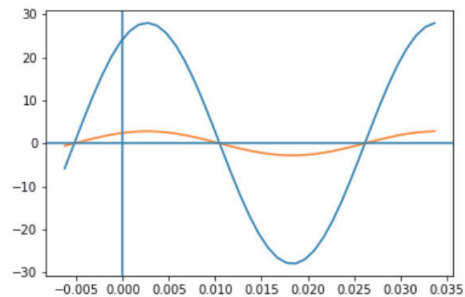
(9) 撰寫程式如下：

圖 (2) $\bar{V}-\bar{I}$ 相量圖

```

import matplotlib.pyplot as plt #載入繪圖模組
import numpy as np #載入numph 模組
pi=np.pi
Vm=20*1.4
R=10
Im=Vm/R
vsi=60 #度度量
isi=vsi #度度量
vsi=(vsi/180)*pi #徑度量
isi=(isi/180)*pi #徑度量
w=200
T=2*pi/w
dt=0.001
t = np.arange(0, 1.1*T,dt) #繪製1.3個波形
#t為串列，其值從-0.2*T到2.1*T，dt=0.001
y1=Vm*np.sin(w*t+vsi)#計算每一個x對應的y1值，y1也是串列
y2=Im*np.sin(w*t+isi)#計算每一個x對應的y2值，y2也是串列
plt.plot(t,y1) #繪出v(t)函數圖形，藍色
plt.plot(t,y2) #繪出i(t)函數圖形，橘色
plt.axhline(y=0) #繪出x軸
plt.axvline(x=0) #繪出y軸
plt.show() #於視窗輸出圖形

```



圖(3) 程式執行結果，藍色是 $v_R(t)$ ，橘紅色是 $i(t)$ ，請留意相位角相同

(10) 程式執行結果如圖(3)，請留意相位角相同。

自我練習

1. 如右圖所示的純電阻交流電路，已知

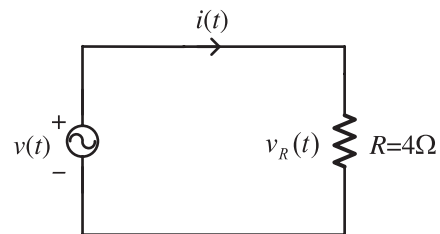
$$i(t) = 8\sqrt{2} \sin(377t + 30^\circ) \text{ A}, \quad R = 4\Omega,$$

試求：

(1) $\bar{I}$ (2) $\bar{V}$ (3) $v(t)$ (4) $v_R(t)$

(5) $\bar{V}_R$ (6) ω (7) f (8) T

(9) $\bar{V} - \bar{I}$ 相量圖 (10) 寫程式繪出 $v_R(t)$ 與 $i(t)$ 函數圖。



純電容電路

交流電路裡，僅包含電容者，稱為純電容電路。例如，圖 9-1e 即為純電容電路。

電容抗

純電容電路，電容器端電壓與電流的比值，我們定義為電容抗 (capacitive reactance)，符號為 $\bar{X}_C$ ，此為相量，其大小為 X_C ，相位角將會以 θ 表示。圖 9-1f 電路裡，以示波器量測， $v_C(t)$ 與 $i(t)$ 的波形如圖 9-1g，CH1（黃色）是 $v_C(t)$ ，CH2（藍色）是 $i(t)$ 。

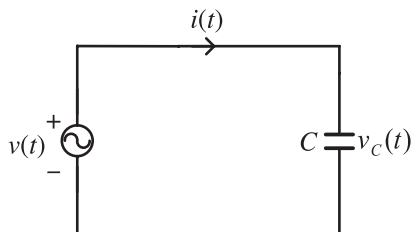


圖 9-1e 純電容電路

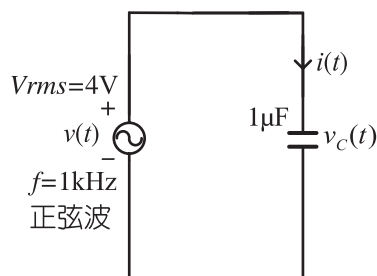


圖 9-1f

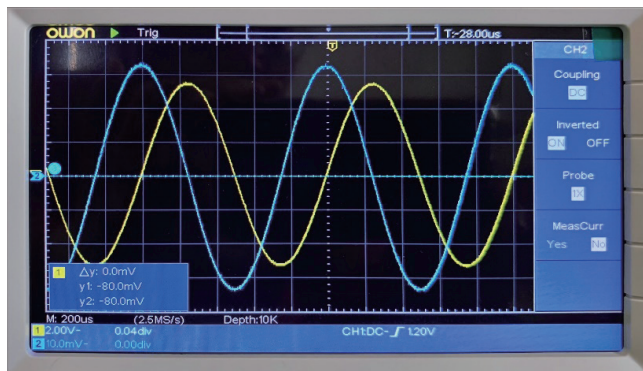


圖 9-1g $v_C(t)$ 與 $i(t)$ 的波形圖

信號產生器：

$V_m=5.6V$ ， $f=1kHz$ ，正弦波。

示波器：

$T=200\mu s \times 5=1ms$ 。

CH1(黃色 $v_C(t)$)：

$V_1=2V \times 2.8=5.6V$ 。

CH2(藍色 $i(t)$)：

$V_2=10mV \times 3.2=32mV$

電流相位超前電壓 $1.3/5 \times 360 \div 90^\circ$ 。

1. 由圖 9-1g 可知，黃色波形 $v_C(t)=5.6\sin(2 \times 3.14 \times 1000 \times t)V$ ， $\bar{V}_C \div 4\angle 0^\circ V$ 。
2. 由圖 9-1g 可知，藍色波形 $i(t)=32m\sin(2 \times 3.14 \times 1000 \times t + 90^\circ)A$ ， $\bar{I} \div 22m\angle 90^\circ A$ ，請留意電流超前電壓 90° 。
3. 電容抗 X_C 理論值 $=1/(2 \times \pi \times f \times C)=1/(2 \times 3.14 \times 1k \times 1u) \div 159\Omega$ 。
4. 電容抗 $\bar{X}_C$ 實驗值 $=\bar{V}_C/\bar{I}=(4\angle 0^\circ)/(22m\angle 90^\circ) \div 181\angle -90^\circ \Omega$ ，此與理論值接近。
5. 經過科學家不斷的實驗，我們得到兩個現象。

第 1：交流純電容電路的電流與電壓成正比，與 $f \times C$ 乘積成正比，且歸納得到其關係為：

$I = V \cdot 2\pi fC$ ，爲了配合歐姆定律，我們將 $2\pi fC$ 調整位置如下：

$$= \frac{V}{\frac{1}{2\pi fC}} (\omega = 2\pi f)$$

$$= \frac{V}{\frac{1}{\omega C}} = \frac{V}{X_C}$$

第2：電流 $\bar{I}$ 相位超前電壓 $\bar{V}$ 90° 。根據以上兩點結論，依據歐姆定律：

$$\bar{X}_C = \frac{\bar{V}}{\bar{I}}$$

我們得到純電容電容抗 X_C 與頻率 f 、電容量 C 的乘積成反比，其數學式如下：

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{2\pi fC} \quad (\text{歐姆}, \Omega) \quad \text{(公式9-1b)}$$

電流 $\bar{I}$ 超前電壓 $\bar{V}$ 90° ，表示 $\bar{X}_C$ 相位落後 90° ，以上 $\bar{X}_C$ 包含大小與角度，所以以相量表示如下：

$$\bar{X}_C = \frac{1}{\omega C} \angle -90^\circ = -j \frac{1}{\omega C} = -jX_C \quad (\text{歐姆}, \Omega) \quad \text{(公式9-1c)}$$

⚡ 電流

由 $v(t) = V_m \sin(\omega t)$ ，得到 $V = \frac{V_m}{\sqrt{2}}$ ，且相位角爲 0° ，所以 $\bar{V} = V \angle 0^\circ$ ，依據歐姆定律，純電容電路電流：

$$\bar{I} = \frac{\bar{V}}{\bar{X}_C} = \frac{V \angle 0^\circ}{X_C \angle -90^\circ} = \frac{V \angle 0^\circ}{\frac{1}{\omega C} \angle -90^\circ} = V \omega C \angle 90^\circ \text{ A}$$

相量圖

以上 $v(t) = V_m \sin(\omega t)$, $\bar{V} = \frac{V_m}{\sqrt{2}} \angle 0^\circ = V \angle 0^\circ$,
 $\bar{I} = V\omega C \angle 90^\circ$, 所以 $\bar{V} - \bar{I}$ 相量圖如圖 9-1h , 電流超前
 電壓 90° 相位角。

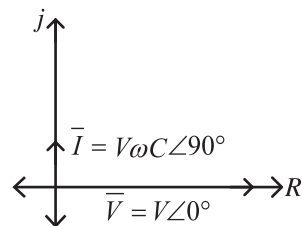


圖 9-1h

範例 9-1b

如圖 (1) 所示之純電容交流電路，已知
 電源電壓 $v(t) = 20\sqrt{2} \sin(100t)$ V，電容量
 $C = 5\text{mF}$ ，試求該電路之：

- (1) $\bar{V}_C$ (2) $\bar{X}_C$ (3) $\bar{I}$ (4) $\bar{V} - \bar{I}$ 相量圖
- (5) $i(t)$ (6) 寫程式計算 $\bar{X}_C$ 、 $\bar{I}$ 且繪出
 $v(t)$ 與 $i(t)$ 波形。

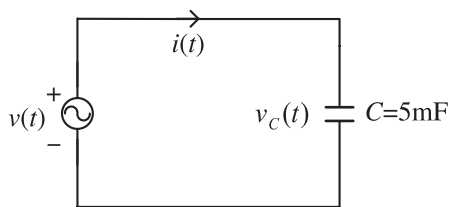


圖 (1)

解

由 $v(t) = 20\sqrt{2} \sin(100t) \Rightarrow \bar{V} = 20 \angle 0^\circ \text{V}$, $\omega = 100 \text{ rad/s}$ 。

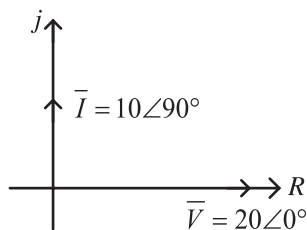
(1) 由克希荷夫電壓定律， $\bar{V}_C = \bar{V} = 20 \angle 0^\circ \text{V}$

(2) 由公式 9-1b， $X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{100 \cdot 5\text{m}} = 2\Omega$

由公式 9-1c， $\bar{X}_C = X_C \angle -90^\circ = 2 \angle -90^\circ \Omega$

(3) 由歐姆定律 $\bar{I} = \frac{\bar{V}}{\bar{X}_C} = \frac{20 \angle 0^\circ}{2 \angle -90^\circ} = 10 \angle 90^\circ \text{A}$

(4) 由 $\bar{V} = 20 \angle 0^\circ \text{V}$ ， $\bar{I} = 10 \angle 90^\circ \text{A}$ 得到 $\bar{V} - \bar{I}$ 相量圖如圖 (2)

圖 (2) $\bar{V} - \bar{I}$ 相量圖

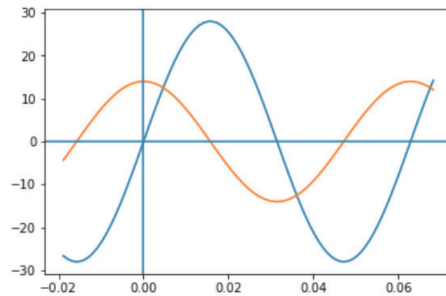
(5) 由 $\bar{I} = 10 \angle 90^\circ \text{A}$ 與 $\omega = 100 \text{ rad/s}$ ，得到 $i(t) = 10\sqrt{2} \sin(100t + 90^\circ) \text{A}$

(6) 撰寫程式如下；執行結果如圖 (3)，請留意電流超前電壓 90° ，波形如圖 (4)。

```
import matplotlib.pyplot as plt #載入繪圖模組
import numpy as np #載入numph 模組
import math , cmath
def pr(Z):
    r,si=cmath.polar(Z)#複數轉極座標
    si=math.degrees(si) #轉為度度量
    print("%3.1f∠%3.1f" %(r,si))
Vm=20*1.4;si=0
u=0.000001;m=0.001;C=5*m;w=100
si=si*math.pi/180
a=Vm/1.4*math.cos(si)
b=Vm/1.4*math.sin(si)
V=complex(a,b) #將相量轉複數
print("/V=",end="");pr(V)
XC=(1/(w*C));XC=complex(0,-XC)
print("/XC=",end="");pr(XC)
Z=XC
I=V/Z
print("/I=",end="");pr(I)
r,isi=cmath.polar(I)#直角座標轉極座標
Im=r*1.4
pi=np.pi
T=2*pi/w;dt=T/100
t = np.arange(-0.3*T, 1.1*T,dt) #
y1=Vm*np.sin(w*t)#計算每一個x對應的y1值
y2=Im*np.sin(isi+w*t)#計算每一個x對應的y2值
plt.plot(t,y1) #繪出v(t)函數圖形,藍色
plt.plot(t,y2) #繪出i(t)函數圖形,橘色
plt.axhline(y=0)#繪出x軸
plt.axvline(x=0)#繪出y軸
plt.show() #於視窗輸出圖形
```

```
/V=20.0∠0.0
/XC=2.0∠-90.0
/I=10.0∠90.0
```

圖 (3)

圖 (4) $v(t)$ (藍色) 與 $i(t)$ (橘紅色) 波形圖，請留意電流超前電壓 90°

自我練習

1. 電路如範例 9-1b 圖 (1)，已知 $i(t) = 20\sqrt{2} \sin(100t + 10^\circ) \text{ A}$ ， $C = 10\text{mF}$ ，試求：
- (1) ω (2) f (3) X_C (4) $\bar{X}_C$ (5) $\bar{Z}$ (6) $\bar{I}$ (7) $\bar{V}$ (8) $\bar{V} - \bar{I}$ 相量圖
(9) $v(t)$ (10) $v(t)$ 的相位角。

純電感電路

交流電路裡，僅包含電感者，稱為純電感電路。例如，圖 9-1i 即為純電感電路。

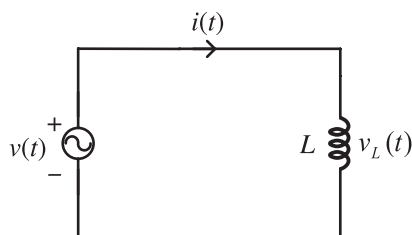


圖 9-1i 純電感電路

電感抗

純電感電路，電感器端電壓與電流的比值，我們定義為電感抗 (inductive reactance)，簡稱感抗，符號是 $\bar{X}_L$ ，此為相量，其大小為 X_L ，相位角將會以 θ 表示。圖 9-1j 電路裡，以示波器量測， $v_L(t)$ 與 $i(t)$ 的波形如圖 9-1k，CH1 (黃色) 是 $v_L(t)$ ，CH2 (藍色) 是 $i(t)$ 。

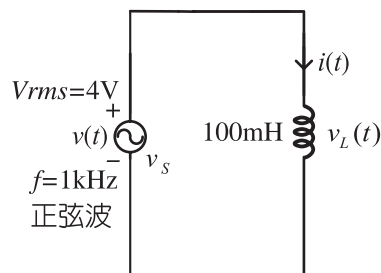
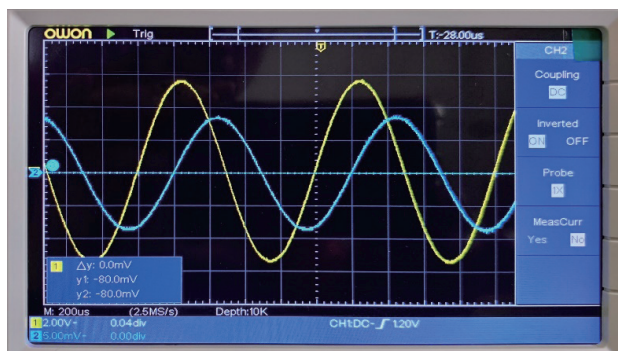


圖 9-1j

圖 9-1k $v_L(t)$ 與 $i(t)$ 的波形

信號產生器：

$V_m = 5.6\text{V}$ ， $f = 1\text{kHz}$ ，正弦波。

示波器：

$T = 200\mu\text{s} \times 5 = 1\text{ms}$ 。

CH1(黃色 $v_L(t)$)：

$V_1 = 2\text{V} \times 2.8 = 5.6\text{V}$

CH2(藍色 $i(t)$)：

$V_2 = 5\text{mV} \times 1.7 = 8.5\text{mV}$

電流相位落後電壓 $1/5 \times 360 = 72^\circ$ (因為電感有內阻，無法達 90°)。

- 由圖 9-1k 可知，黃色波形 $v_L(t) = 5.6\sin(2 \times 3.14 \times 1000 \times t) \text{ V}$ ， $\bar{V}_L \doteq 4 \angle 0^\circ \text{ V}$ 。
- 由圖 9-1k 可知，藍色波形 $i(t) = 8.5\text{mA} \sin(2 \times 3.14 \times 1000 \times t - 72^\circ) \text{ A}$ ， $\bar{I} \doteq 6\text{mA} \angle -72^\circ$ A，請留意電流落後電壓 72° (因為電感有內阻，無法達到 90°)。
- 感抗 X_L 理論值 $= 2 \times \pi \times f \times L = 2 \times 3.14 \times 1\text{k} \times 100\text{m} \doteq 628\Omega$ 。
- 感抗實驗值 $\bar{X}_L = \bar{V}_L / \bar{I} = (4 \angle 0^\circ) / (6\text{mA} \angle -72^\circ) \doteq 666 \angle 72^\circ \Omega$ ，與理論值接近。

6. 經過科學家不斷的實驗，我們得到兩個現象。

第1：交流純電感電路的電流與電壓成正比，與 $f \times L$ 乘積成反比，且歸納得到其關係為：

$$I = \frac{V}{2\pi fL} = \frac{V}{\omega L} = \frac{V}{X_L}。$$

第2：電流 $\bar{I}$ 相位落後電壓 $\bar{V}$ 90° 。根據以上兩點結論，依據歐姆定律：

$$\bar{X}_L = \bar{V} / \bar{I}$$

我們得到純電感電感抗：

$$X_L = \omega L = 2\pi fL \text{ (歐姆, } \Omega \text{)}$$

(公式9-1d)

電流 $\bar{I}$ 相位落後電壓 $\bar{V}$ 相位 90° ，表示 $\bar{X}_L$ 相位超前 90° ，以上 $\bar{X}_L$ 包含大小與角度，所以以相量 $\bar{X}_L$ 表示如下：

$$\bar{X}_L = \omega L \angle 90^\circ = j\omega L = jX_L \text{ (歐姆, } \Omega \text{)}$$

(公式9-1e)

以上實驗過程，為基本電學實習範圍，我們於基本電學實習介紹。

⚡ 電流

由 $v(t) = V_m \sin(\omega t)$ ，得到 $V = \frac{V_m}{\sqrt{2}}$ ，且相位角為 0° ，所以 $\bar{V} = V \angle 0^\circ$ ，依據歐姆定律，純電感電路電流：

$$\bar{I} = \frac{\bar{V}}{\bar{X}_L} = \frac{V \angle 0^\circ}{X_L \angle 90^\circ} = \frac{V \angle 0^\circ}{\omega L \angle 90^\circ} = \frac{V}{\omega L} \angle -90^\circ \text{ A}$$

⚡ $\bar{V} - \bar{I}$ 相量圖

以上 $v(t) = V_m \sin(\omega t)$ ， $\bar{V} = \frac{V_m}{\sqrt{2}} \angle 0^\circ$ ， $\bar{I} = \frac{V}{\omega L} \angle -90^\circ \text{ A}$

所以 $\bar{V} - \bar{I}$ 相量圖如圖 9-11，請留意 $\bar{I}$ 落後 $\bar{V}$ 90° 相位角。

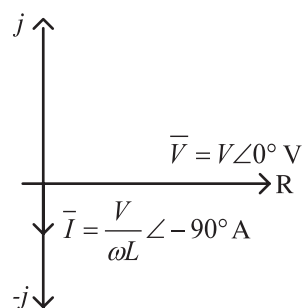


圖 9-11

範例9-1c

如圖 (1) 所示之純電感電路，已知電壓源電壓 $v(t)=12\sqrt{2}\sin(500t+30^\circ)\text{V}$ ，若 $L=6\text{mH}$ ，試求：

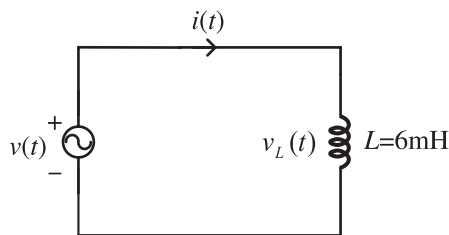
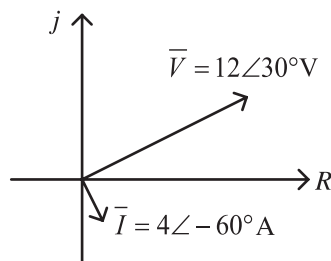


圖 (1)

- (1) $\bar{V}$ (2) ω (3) f (4) T (5) $\bar{V}_L$
- (6) $v_L(t)$ (7) X_L (8) $\bar{X}_L$ (9) $\bar{Z}$
- (10) $\bar{I}$ (11) $\bar{V}-\bar{I}$ 相量圖 (12) $i(t)$
- (13) 寫程式計算 $\bar{X}_L$ 、 $\bar{I}$ 繪出 $v(t)$ 與 $i(t)$ 波形且算出 $v(0)$ ， $i(0)$ 的值。

解

- (1) 由 $v(t)=12\sqrt{2}\sin(500t+30^\circ)\text{V}$ ，得到 $\bar{V}=12\angle 30^\circ\text{V}$ ， $\omega=500\text{ rad/s}$ 。
- (2) $\omega=500\text{ rad/s}$ 。
- (3) 由 $\omega=2\pi f$ ，得到 $f=\frac{500}{2\pi}\div 80\text{Hz}$ 。
- (4) 由 $T=\frac{1}{f}=\frac{1}{80}=12.5\text{ms}$ 。
- (5) 由克希荷電壓定律， $\bar{V}_L=\bar{V}=12\angle 30^\circ\text{V}$ 。
- (6) 由 $\bar{V}_L=12\angle 30^\circ\text{V}$ ， $\omega=500\text{ rad/s}$ ，得到 $v_L(t)=12\sqrt{2}\sin(500t+30^\circ)\text{V}$ 。
- (7) 依據公式 9-1d，得到 $X_L=\omega L=500\cdot 6\text{m}=3\Omega$ 。
- (8) 純電感電流落後 90° ，由歐姆定律 $\bar{X}_L=\frac{\bar{V}}{\bar{I}}$ ，表示電感抗要超前 90° ，所以 $\bar{X}_L=3\angle 90^\circ\Omega$ 。
- (9) 純電感電路 $\bar{Z}=\bar{X}_L=3\angle 90^\circ\Omega$ 。
- (10) 依據歐姆定律 $\bar{I}=\frac{\bar{V}}{\bar{Z}}=\frac{\bar{V}}{\bar{X}_L}=\frac{12\angle 30^\circ}{3\angle 90^\circ}=4\angle -60^\circ\text{A}$ 。
- (11) 由 $\bar{V}=12\angle 30^\circ$ 與 $\bar{I}=4\angle -60^\circ$ ，繪出 $\bar{V}-\bar{I}$ 相量圖如圖 (2)。
- (12) 由 $\bar{I}=4\angle -60^\circ\text{V}$ 與 $\omega=500\text{ rad/s}$ ，得到 $i(t)=4\sqrt{2}\sin(500t-60^\circ)\text{A}$ 。
- (13) 撰寫程式如下，執行結果如圖 (3)，波形如圖 (4)。

圖 (2) $\bar{V}-\bar{I}$ 相量圖

```

import matplotlib.pyplot as plt #載入繪圖模組
import numpy as np #載入numph 模組
import math , cmath
def pr(Z):
    r,si=cmath.polar(Z)#複數轉極座標
    si=math.degrees(si) #轉為度度量
    print("%3.1f∠%3.1f" %(r,si))
u=0.000001;m=0.001;pi=math.pi
Vm=12*1.4;w=500;vsi=30;
L=6*m
vsi=vsi*pi/180
a=Vm/1.4*math.cos(vsi)
b=Vm/1.4*math.sin(vsi)
V=complex(a,b) #將相量轉複數
print("/V=",end="");pr(V)
XL=w*L;XL=complex(0,XL)
print("/XL=",end="");pr(XL)
Z=XL
I=V/Z
print("/I=",end="");pr(I)
Ir,isi=cmath.polar(I)#直角座標轉極座標
Im=Ir*1.4
T=2*pi/w;dt=T/100
t = np.arange(-0.3*T, 1.1*T,dt) #
y1=Vm*np.sin(w*t+vsi)#計算每一個x對應的y1值
y2=Im*np.sin(w*t+isi)#計算每一個x對應的y2值
plt.plot(t,y1) #繪出v(t)函數圖形,藍色
plt.plot(t,y2) #繪出i(t)函數圖形,橘色
plt.axhline(y=0)#繪出x軸
plt.axvline(x=0)#繪出y軸
plt.show() #於視窗輸出圖形
t=0;
y1=Vm*np.sin(w*t+vsi)#計算每一個x對應的y1值
y2=Im*np.sin(w*t+isi)#計算每一個x對應的y2值
print("t=0,v=%4.1f"%y1)
print("t=0,i=%4.1f"%y2)

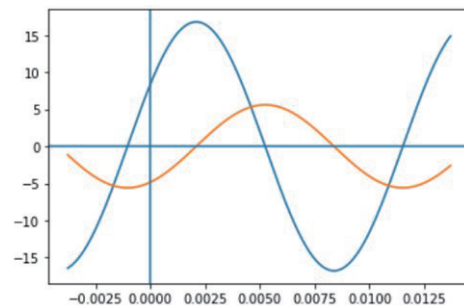
```

```

/V=12.0∠30.0
/XL=3.0∠90.0
/I=4.0∠-60.0
t=0,v= 8.4
t=0,i=-4.8

```

圖(3)



圖(4) 程式執行結果，藍色是 $v_L(t)$ ，橘紅色是 $i(t)$ ，請留意電流落後電壓 60° 相位角。

自我練習

1. 如圖 (4) 所示，已知

$$i(t) = 4\sqrt{2} \sin(800t - 30^\circ), L = 5\text{mH}。$$

試求：

(1) $\bar{I}$ (2) ω (3) f (4) T (5) $v_L(t)$

(6) $\bar{V}_L$ (7) X_L (8) $\bar{X}_L$ (9) $\bar{Z}$ (10) $\bar{V}$

(11) $\bar{V} - \bar{I}$ 相量圖 (12) $v(t)$

(13) 寫程式繪出 $v(t)$ 與 $i(t)$ 函數圖。

2. 某一電路只連接單一元件，其 $v(t) = 6\sqrt{2} \sin(600t + 60^\circ)$ V，
 $i(t) = 2\sqrt{2} \sin(600t - 30^\circ)$ A，試求此單一元件的名稱？若是電阻，其電阻值？若是電感，其電感值？

3. 某電路的電源電壓 $v(t)$ 與電流 $i(t)$ 週期波形如圖 (5) 所示，則該電路負載為？

台北捷運 112

- (A) 純電組 (B) 純電感
(C) 純電容 (D) 阻抗

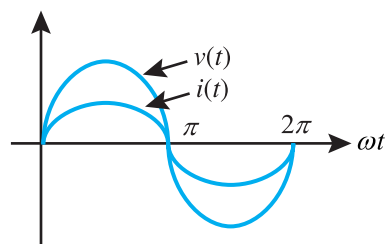


圖 (5)

4. 如圖 (6) 所示電路，若
 $v(t) = 121.2 \cos(1000t)$ V， $i(t) = 12.12 \sin(1000t)$ A，
則下列何者正確？

統測 109

- (A) Z 為電阻，其值為 10Ω
(B) Z 為電容，其值為 $100\mu\text{F}$
(C) Z 為電感，其值為 10mH
(D) Z 為電容，其值為 $10\mu\text{F}$

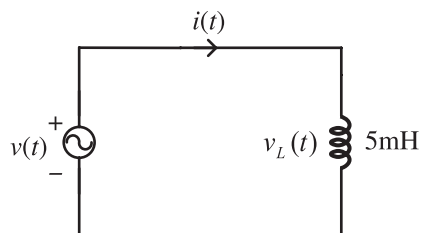


圖 (4)

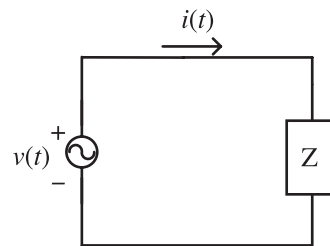


圖 (6)

9-2 電阻電容、電阻電感及電阻電感電容串聯電路

前面 9-1 節已經介紹純電阻在交流電之下，其電阻值：

$$R = R$$

與輸入電壓角速度 ω 無關。電容的容抗與輸入電壓的角速度 ω 有關，而且電容容抗是落後 90° ，其表示式是：

$$\bar{X}_C = -j \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{\omega C} \angle -90^\circ \text{ (歐姆, } \Omega \text{)}$$

電感的感抗也與輸入電壓角速度 ω 有關，而且電感感抗是超前 90° ，其表示式是：

$$\bar{X}_L = j\omega L = \omega L \angle 90^\circ \text{ (歐姆, } \Omega \text{)}$$

本節則要開始探討電阻電容串聯（以下簡稱 RC 串聯）、電阻電感串聯（以下簡稱 RL 串聯）及電阻電容電感串聯（以下簡稱 RCL 串聯）等串聯電路，以上串聯電路求總阻抗與總電流的計算步驟如下：

1. 計算 R ： R 僅與 R 值有關，不會隨著角速度 ω 更動。 (公式 9-2a)
2. 計算 $\bar{X}_C$ ： $\bar{X}_C = \frac{1}{\omega C} \angle -90^\circ \Omega$ 。 (公式 9-2b)
3. 計算 $\bar{X}_L$ ： $\bar{X}_L = \omega L \angle 90^\circ \Omega$ 。 (公式 9-2c)
4. 計算 $\bar{Z}$ ： $\bar{Z} = R + \bar{X}_C + \bar{X}_L$ 。 (公式 9-2d)
5. 計算 $\bar{I}$ ： $\bar{I} = \frac{\bar{V}}{\bar{Z}}$ 。 (公式 9-2e)
6. 計算 $\bar{V}_R$ ： $\bar{V}_R = \bar{I}R$ 。 (公式 9-2f)
7. 計算 $\bar{V}_C$ ： $\bar{V}_C = \bar{I}\bar{X}_C$ 。 (公式 9-2g)
8. 計算 $\bar{V}_L$ ： $\bar{V}_L = \bar{I}\bar{X}_L$ 。 (公式 9-2h)
9. 電路特性： $X_L = X_C$ 時，電路是電阻性，此時電流與電壓同相； $X_L > X_C$ 時，電路是電感性，此時電流落後總電壓； $X_L < X_C$ 時，電路是電容性，此時電流超前總電壓。

以上交流串聯電路除了阻抗使用複數表示，計算使用複數運算，其餘都與直流電路相同，一樣遵守歐姆定律，一樣遵守 KVL 與 KCL 定律，總阻抗等於全部個別阻抗之和，請看以下範例說明。

範例9-2a

如圖 (1) 之 RC 串聯電路，若 $R=6\Omega$ ，
 $C=1250\mu\text{F}$ ，當接於 $v(t)=50\sqrt{2}\sin(100t+30^\circ)\text{V}$
 之電源電壓時，試求：

- (1) 電源 $\bar{V}$ (2) $\bar{X}_C$ (3) $\bar{Z}$ (4) $\bar{I}$ (5) $i(t)$
- (6) $\bar{V}_R$ (7) $\bar{V}_C$ (8) $\bar{V}$ 與 $\bar{I}$ 的相位差 θ
- (9) $\bar{V}$ 、 $\bar{V}_R$ 、 $\bar{V}_C$ 與 $\bar{I}$ 的相量圖。

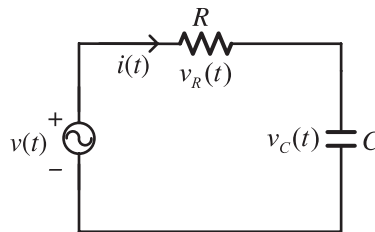


圖 (1)

解

(1) 由 $v(t)=50\sqrt{2}\sin(100t+30^\circ)\text{V}$ 得到 $\bar{V}=50\angle 30^\circ\text{V}$ ， $\omega=100\text{ rad/s}$ 。

(2) 依據公式 9-2b， $X_C=\frac{1}{\omega C}=\frac{1}{100\cdot 1250\mu}=8\Omega$
 $\bar{X}_C=-j8\Omega=8\angle -90^\circ\Omega$

(3) 依據公式 9-2d，串聯阻抗為所有元件阻抗之和
 $\bar{Z}=R+\bar{X}_C=(6-j8)$ ，邊長 3:4:5，如圖 (2)
 $=10\angle -53^\circ\Omega$

(4) 由歐姆定律， $\bar{I}=\frac{\bar{V}}{\bar{Z}}=\frac{50\angle 30^\circ}{10\angle -53^\circ}=5\angle 83^\circ\text{A}$ 。

(5) 由 $\bar{I}=5\angle 83^\circ$ 與 $\omega=100$ 得到 $i(t)=5\sqrt{2}\sin(100t+83^\circ)\text{A}$ 。

(6) $\bar{V}_R=\bar{I}\cdot R=5\angle 83^\circ\cdot 6=30\angle 83^\circ\text{V}$ 。

(7) $\bar{V}_C=\bar{I}\cdot \bar{X}_C=5\angle 83^\circ\cdot 8\angle -90^\circ=40\angle -7^\circ\text{V}$ 。

(8) $\bar{V}$ 與 $\bar{I}$ 的相位差； $\theta_v-\theta_i=30^\circ-83^\circ=-53^\circ$ 。

(9) $\bar{V}$ 、 $\bar{V}_R$ 、 $\bar{V}_C$ 與 $\bar{I}$ 的相量圖，如圖 (3)，請留意 $\bar{I}$ 超前 $\bar{V}$ ，為電容性電路。

(10) $v_R(t)=30\sqrt{2}\sin(100t+83^\circ)\text{V}$ 。

(11) $v_C(t)=40\sqrt{2}\sin(100t-7^\circ)\text{V}$ 。

(12) 撰寫程式如下：執行結果如圖 (4)，

可得到 $v(t)$ 、 $v_R(t)$ 、 $v_C(t)$ 、 $i(t)$ 等波形圖，藍色是 $v(t)$ ，橘紅是 $v_R(t)$ ，綠色是 $v_C(t)$ ，紅色是 $i(t)$ 。

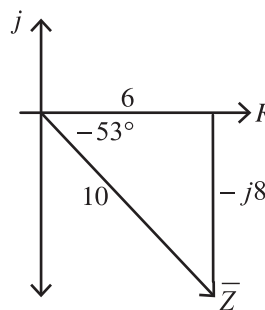


圖 (2)

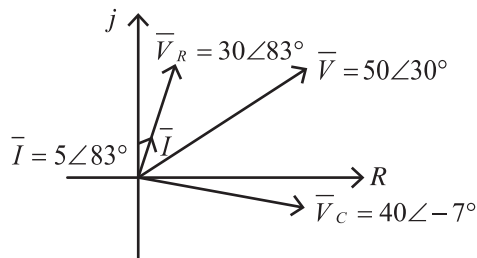


圖 (3)


```

import matplotlib.pyplot as plt #載入繪圖模組
import numpy as np #載入numph 模組
import math , cmath
def pr(Z):
    r,si=cmath.polar(Z)#複數轉極座標
    si=math.degrees(si) #轉為度度量
    print("%3.1f∠%3.1f" %(r,si))
u=0.000001;m=0.001;pi=math.pi
Vm=50*1.4;w=100;vsi=30;
R=6;C=1250*u
vsi=vsi*pi/180
a=Vm/1.4*math.cos(vsi)
b=Vm/1.4*math.sin(vsi)
V=complex(a,b) #將相量轉複數
print("/V=",end="");pr(V)
XCR=(1/(w*C));XC=complex(0,-XCR)
print("/XC=",end="");pr(XC)
Z=R+XC
print("/Z=",end="");pr(Z)
I=V/Z
print("/I=",end="");pr(I)
VR=I*R
print("/VR=",end="");pr(VR)
VC=I*XC
print("/VC=",end="");pr(VC)
Ir,isi=cmath.polar(I)#直角座標轉極座標
Im=Ir*1.4
T=2*pi/w;dt=T/100
t = np.arange(-0.3*T, 1.1*T,dt) #
y1=Vm*np.sin(w*t+vsi)#v(t)
y2=Im*R*np.sin(w*t+isi)#vr(t)
y3=Im*XCR*np.sin(w*t+isi-pi/2)#vc(t)
y4=Im*np.sin(w*t+isi)#i(t)
plt.plot(t,y1) #繪出v(t)函數圖形,藍色
plt.plot(t,y2) #繪出vr(t)函數圖形,橘色
plt.plot(t,y3) #繪出vc(t)函數圖形,綠色
plt.plot(t,y4) #繪出i(t)函數圖形,紅色
plt.axhline(y=0)#繪出x軸
plt.axvline(x=0)#繪出y軸
plt.show() #於視窗輸出圖形
t=0;
y1=Vm*np.sin(w*t+vsi)#v(t)

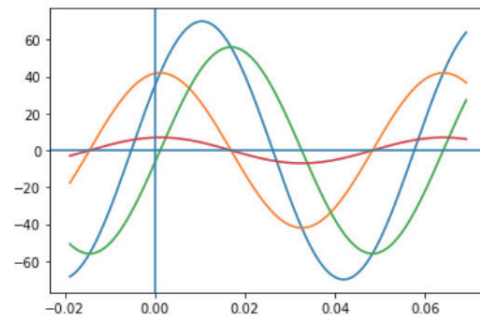
```

```

/V=50.0∠30.0
/XC=8.0∠-90.0
/Z=10.0∠-53.1
/I=5.0∠83.1
/VR=30.0∠83.1
/VC=40.0∠-6.9
t=0,v=35.0
t=0,vr=41.7
t=0,vc=-6.7
t=0,i= 6.9

```

圖 (3)

圖 (4) 波形圖，藍色是 $v(t)$ ，橘紅色是 $v_R(t)$ ，綠色是 $v_C(t)$ ，紅色是 $i(t)$

```

y2=Im*R*np.sin(w*t+isi)#vr(t)
y3=Im*XCR*np.sin(w*t+isi-pi/2)#vc(t)
y4=Im*np.sin(w*t+isi)#i(t)
print("t=0,v=%4.1f"%y1)
print("t=0,vr=%4.1f"%y2)
print("t=0,vc=%4.1f"%y3)
print("t=0,i=%4.1f"%y4)

```

自我練習

- 如範例圖 (1) 之 RC 串聯電路，若 $R=8\Omega$ ， $C=167\mu\text{F}$ ， $v(t)=40\sqrt{2}\sin(1000t+30^\circ)\text{V}$ ，試求：
 - $\bar{V}$
 - $\bar{X}_C$
 - $\bar{Z}$
 - $\bar{I}$
 - $\bar{V}_R$
 - $\bar{V}_C$
 - $\bar{V}$ 與 $\bar{I}$ 的相位差 θ 。
 - $\bar{V}$ 、 $\bar{V}_R$ 、 $\bar{V}_C$ 與 $\bar{I}$ 的相量圖。
 - 依照以上結果，寫程式繪出波形圖。
- 如圖 (4) 所示 RC 串聯交流電路，若電源電壓 $v_s(t)=200\sqrt{2}\sin(500t)\text{V}$ 、電流 $i_s(t)=10\sin(500t+45^\circ)\text{A}$ ，則電阻 R 及電容 C 為何？
 - $R=20\Omega$ ， $C=100\mu\text{F}$
 - $R=20\sqrt{2}\Omega$ ， $C=100\sqrt{2}\mu\text{F}$
 - $R=10\sqrt{2}\Omega$ ， $C=50\sqrt{2}\mu\text{F}$
 - $R=10\Omega$ ， $C=50\mu\text{F}$
- 有一個電壓源 $v_s(t)=100\sqrt{2}\cos(2500t-30^\circ)\text{V}$ 接 $R=40\Omega$ ， $C=10\mu\text{F}$ 之 RC 串聯交流電路，則下列敘述何者正確？

統測107

 - 電路總阻抗 $\bar{Z}=40+j40\Omega$
 - 電路總阻抗大小 $Z=80\Omega$
 - 電阻 R 兩端電壓 $v_R(t)=100\cos(2500t-30^\circ)\text{V}$
 - 電阻 C 兩端電壓 $v_C(t)=100\cos(2500t-75^\circ)\text{V}$
- 某 RC 串聯電路的輸入電壓為 $4\sin(377t)\text{V}$ ，若流經電阻的電流為 $\sqrt{2}\sin(377t+45^\circ)\text{A}$ ，則電阻約為多少歐姆？

統測104

 - 4
 - 3
 - $2\sqrt{2}$
 - 2

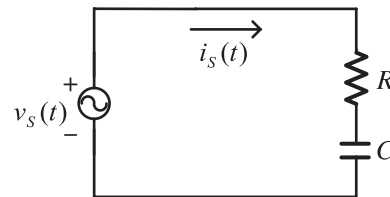
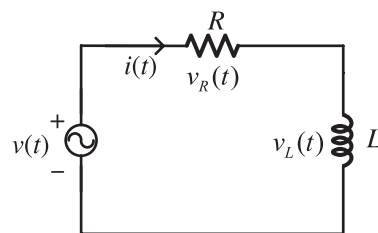


圖 (4)

範例9-2b

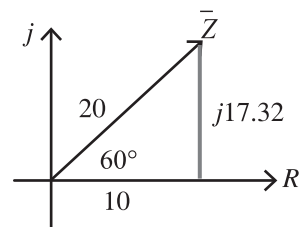
有一10mH之電感器與 10Ω 電阻器，串聯接於
 $v(t) = 10\sqrt{2} \sin(1732t + 30^\circ)$ V 的電源，如圖(1)，
 試求電路：(1) 電源 $\bar{V}$ (2) $\bar{X}_L$ (3) $\bar{Z}$ (4) $\bar{I}$
 (5) $i(t)$ (6) $\bar{V}_R$ (7) $\bar{V}_L$ (8) $\bar{V}$ 與 $\bar{I}$ 的相位差 θ
 (9) $\bar{V}$ 、 $\bar{V}_R$ 、 $\bar{V}_L$ 與 $\bar{I}$ 的相量圖。



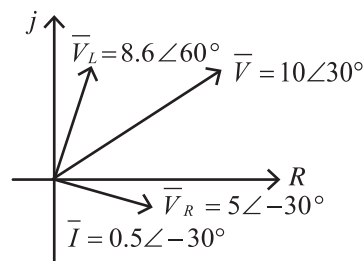
圖(1)

解

- (1) 電源 $\bar{V} = 10\angle 30^\circ$ V。
- (2) 依照公式 9-1d， $X_L = \omega L = 1732 \cdot 10m = 17.32\Omega$
 $\Rightarrow \bar{X}_L = j17.32\Omega = 17.32\angle 90^\circ\Omega$ 。
- (3) $\bar{Z} = R + \bar{X}_L = 10 + j17.32$ ，如圖(2)，此為1: $\sqrt{3}$:2三角形，所以 $\bar{Z} = 20\angle 60^\circ\Omega$ 。
- (4) $\bar{I} = \frac{\bar{V}}{\bar{Z}} = \frac{10\angle 30^\circ}{20\angle 60^\circ} = 0.5\angle -30^\circ$ A。
- (5) $i(t) = 0.5\sqrt{2} \sin(1732t - 30^\circ)$ A。
- (6) $\bar{V}_R = \bar{I} \cdot R = 0.5\angle -30^\circ \times 10 = 5\angle -30^\circ$ V。
- (7) $\bar{V}_L = \bar{I} \cdot \bar{X}_L = 0.5\angle -30^\circ \times 17.32\angle 90^\circ = 8.6\angle 60^\circ$ V。
- (8) $\bar{V}$ 與 $\bar{I}$ 的相位差 $\theta_v - \theta_i = 30 - (-30^\circ) = 60^\circ$ 。
- (9) $\bar{V}$ 、 $\bar{V}_R$ 、 $\bar{V}_L$ 與 $\bar{I}$ 相量圖，如圖(3)，請留意 $\bar{I}$ 落後 $\bar{V}$ ，為電感性電路。
- (10) 以上 $\bar{Z}$ 、 $\bar{I}$ 、 $\bar{V}_R$ 及 $\bar{V}_L$ 計算的 Python 程式如下：



圖(2)



圖(3)

```

import matplotlib.pyplot as plt #載入繪圖模組
import numpy as np #載入numph 模組
import math , cmath
def pr(Z):
    r,si=cmath.polar(Z)#複數轉極座標
    si=math.degrees(si) #轉為度度量
    print("%3.1f∠%3.1f" %(r,si))
u=0.000001;m=0.001;pi=math.pi
Vm=10*1.4;w=1732;vsi=30;
L=10*m;R=10
vsi=vsi*pi/180
a=Vm/1.4*math.cos(vsi)
b=Vm/1.4*math.sin(vsi)
V=complex(a,b) #將相量轉複數
print("/V=",end="");pr(V)
XLR=w*L;XL=complex(0,XLR)
print("/XL=",end="");pr(XL)
Z=R+XL
print("/Z=",end="");pr(Z)
I=V/Z
print("/I=",end="");pr(I)
VR=I*R
print("/VR=",end="");pr(VR)
VL=I*XL
print("/VL=",end="");pr(VL)
Ir,isi=cmath.polar(I)#直角座標轉極座標
Im=Ir*1.4
T=2*pi/w;dt=T/100
t = np.arange(-0.3*T, 1.1*T,dt) #
y1=Vm*np.sin(w*t+vsi)#v(t)
y2=Im*R*np.sin(w*t+isi)#vr(t)
y3=Im*XL*np.sin(w*t+isi+pi/2)#vL(t)
y4=Im*np.sin(w*t+isi)#i(t)
plt.plot(t,y1) #繪出v(t)函數圖形,藍色
plt.plot(t,y2) #繪出vr(t)函數圖形,橘色
plt.plot(t,y3) #繪出vL(t)函數圖形,綠色
plt.plot(t,y4) #繪出i(t)函數圖形,紅色
plt.axhline(y=0)#繪出x軸
plt.axvline(x=0)#繪出y軸

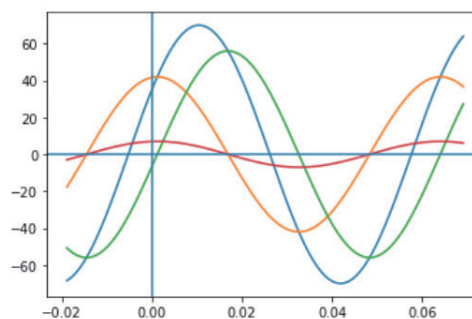
```

```

/V=50.0∠30.0
/XC=8.0∠-90.0
/Z=10.0∠-53.1
/I=5.0∠83.1
/VR=30.0∠83.1
/VC=40.0∠-6.9
t=0,v=35.0
t=0,vr=41.7
t=0,vc=-6.7
t=0,i= 6.9

```

圖(3) 程式執行結果

圖(4) 波形圖，藍色是 $v(t)$ ，橘色是 $v_R(t)$ ，綠色是 $v_L(t)$ ，紅色是 $i(t)$

```
plt.show() #於視窗輸出圖形
t=0;
y1=Vm*np.sin(w*t+vsi)#v(t)
y2=Im*R*np.sin(w*t+isi)#vr(t)
y3=Im*XL*np.sin(w*t+isi+pi/2)#vL(t)
y4=Im*np.sin(w*t+isi)#i(t)
print("t=0,v=%4.1f"%y1)
print("t=0,vr=%4.1f"%y2)
print("t=0,vc=%4.1f"%y3)
print("t=0,i=%4.1f"%y4)
```

自我練習

- 有一 10mH 之電感器與 10Ω 電阻器，串接於 $v(t) = 8\sqrt{2} \sin(1000t + 30^\circ)$ V 之電源，試求該電路：
 - 電源 $\bar{V}$
 - $\bar{X}_L$
 - $\bar{Z}$
 - $\bar{I}$
 - $i(t)$
 - $\bar{V}_R$
 - $\bar{V}_L$
 - $\bar{V}$ 與 $\bar{I}$ 的相位差 θ
 - $\bar{V}$ 、 $\bar{V}_R$ 、 $\bar{V}_L$ 與 $\bar{I}$ 的相量圖。
- 有一 RL 串聯電路， $R = 6\Omega$ ， $L = 6\text{mH}$ ，接於電壓源 $v(t) = 120\sin(1000t + 60^\circ)$ V，則此電路之電流 $i(t)$ 為何？ 統測 112
 - $10\sqrt{2} \sin(1000t + 15^\circ)$ A
 - $10 \sin(1000t + 15^\circ)$ A
 - $10\sqrt{2} \sin(1000t + 60^\circ)$ A
 - $10 \sin(1000t - 45^\circ)$ A
- 如圖 (7) 所示之交流穩態電路，電阻 R_1 為 40Ω ，電感抗 X_L 為 30Ω ，若 a 、 b 兩端電壓的有效值為 200V，則流經電感抗的電流有效值為何？ 統測 110
 - 2A
 - 3A
 - 4A
 - 5A
- 將交流電壓源 $200\sin(100t)$ V 連接至 RL 串聯電路，若流經電阻的電流有效值為 10A，而且電阻 R 與電感 L 上的電壓有效值相同，則電感 L 值為何？ 統測 106
 - 15.9mH
 - 100mH
 - 200mH
 - 314mH

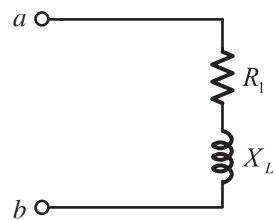


圖 (7)

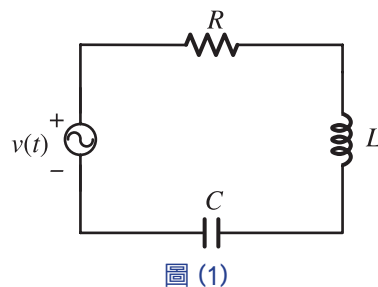
範例9-2c

如圖(1)所示的RLC串聯電路， $R=8\Omega$ ，

$C=100\mu\text{F}$ ， $L=16\text{mH}$ ，串接在

$v(t)=10\sqrt{2}\sin(1000t+30^\circ)$ 的電源，試求：

- (1) 電源 $\bar{V}$ (2) $\bar{X}_L$ (3) $\bar{X}_C$ (4) $\bar{Z}$
 (5) 電路特性 (6) $\bar{I}$ (7) $\bar{V}_R$ (8) $\bar{V}_L$
 (9) $\bar{V}_C$ (10) $\bar{V}$ 、 $\bar{V}_R$ 、 $\bar{V}_L$ 、 $\bar{V}_C$ 與 $\bar{I}$ 相量圖。



圖(1)

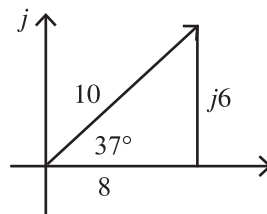
解

(1) $\bar{V}=10\angle 30^\circ \text{ V}$ 。

(2) $X_L=\omega L=1000\cdot 16\text{m}=16\Omega\Rightarrow\bar{X}_L=j16\Omega=16\angle 90^\circ\Omega$ 。

(3) $X_C=\frac{1}{\omega C}=\frac{1}{1000\cdot 100\mu}=10\Omega\Rightarrow\bar{X}_C=-j10\Omega=10\angle -90^\circ\Omega$ 。

(4) $\bar{Z}=R+\bar{X}_L+\bar{X}_C=8+j16-j10=8+j6$ ，如圖(2)，此為3:4:5三角形，所以 $\bar{Z}=10\angle 37^\circ\Omega$ 。



圖(2)

(5) $X_L>X_C$ 所以電路呈現電感性。(請留意圖(3)相量圖， $\bar{I}$ 落後 $\bar{V}$)。

(6) $\bar{I}=\frac{\bar{V}}{\bar{Z}}=\frac{10\angle 30^\circ}{10\angle 37^\circ}=1\angle -7^\circ \text{ A}$ 。

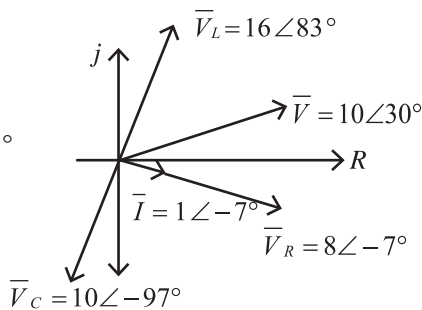
(7) $\bar{V}_R=\bar{I}\cdot R=1\angle -7^\circ\cdot 8=8\angle -7^\circ \text{ V}$ 。

(8) $\bar{V}_L=\bar{I}\cdot\bar{X}_L=1\angle -7^\circ\cdot 16\angle 90^\circ=16\angle 83^\circ \text{ V}$ 。

(9) $\bar{V}_C=\bar{I}\cdot\bar{X}_C=1\angle -7^\circ\cdot 10\angle -90^\circ=10\angle -97^\circ \text{ V}$ 。

- (10) $\bar{V}$ 、 $\bar{V}_R$ 、 $\bar{V}_L$ 、 $\bar{V}_C$ 及 $\bar{I}$ 的相量圖，如圖(3)， $\bar{I}$ 落後 $\bar{V}$ ，電路呈現電感性。

- (11) 以上 $\bar{Z}$ 、 $\bar{I}$ 、 $\bar{V}_R$ 、 $\bar{V}_L$ 、 $\bar{V}_C$ 及 $\bar{I}$ 複數計算的Python程式如下：



圖(3)

```

import matplotlib.pyplot as plt #載入繪圖模組
import numpy as np #載入numph 模組
import math , cmath
def pr(Z):
    r,si=cmath.polar(Z)#複數轉極座標
    si=math.degrees(si) #轉為度度量
    print("%3.1f∠%3.1f" %(r,si))
u=0.000001;m=0.001;pi=math.pi
Vm=10*1.4;w=1000;vsi=30;
R=8;C=100*u;L=16*m
vsi=vsi*pi/180
a=Vm/1.4*math.cos(vsi)
b=Vm/1.4*math.sin(vsi)
V=complex(a,b) #將相量轉複數
print("/V=",end="");pr(V)
XCR=(1/(w*C));XC=complex(0,-XCR)
print("/XC=",end="");pr(XC)
XLR=w*L;XL=complex(0,XLR)
print("/XL=",end="");pr(XL)
Z=R+XL+XC
print("/Z=",end="");pr(Z)
I=V/Z
print("/I=",end="");pr(I)
VR=I*R
print("/VR=",end="");pr(VR)
VL=I*XL
print("/VL=",end="");pr(VL)
VC=I*XC
print("/VC=",end="");pr(VC)
Ir,isi=cmath.polar(I)#直角座標轉極座標
Im=Ir*1.4
T=2*pi/w;dt=T/100
t = np.arange(-0.3*T, 1.1*T,dt) #
y1=Vm*np.sin(w*t+vsi)#v(t)
y2=Im*R*np.sin(w*t+isi)#vr(t)
y3=Im*XCR*np.sin(w*t+isi-pi/2)#vc(t)
y4=Im*XLR*np.sin(w*t+isi+pi/2)#vL(t)
y5=Im*np.sin(w*t+isi)#i(t)
plt.plot(t,y1) #繪出v(t)函數圖形,藍色

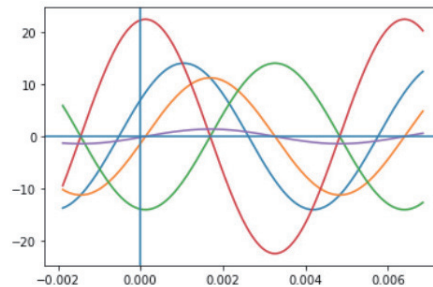
```

```

/V=10.0∠30.0
/XC=10.0∠-90.0
/XL=16.0∠90.0
/Z=10.0∠36.9
/I=1.0∠-6.9
/VR=8.0∠-6.9
/VL=16.0∠83.1
/VC=10.0∠-96.9
t=0,v= 7.0
t=0,vr=-1.3
t=0,vc=-13.9
t=0,vL=22.2
t=0,i=-0.2

```

圖(3) 程式執行結果

圖(4) 波形圖，藍色是 $v(t)$ ，橘色是 $v_R(t)$ ，綠色是 $v_C(t)$ ，紅色是 $v_L(t)$ ，紫色是 $i(t)$

```

plt.plot(t,y2) #繪出vr(t)函數圖形,橘色
plt.plot(t,y3) #繪出vc(t)函數圖形,綠色
plt.plot(t,y4) #繪出vL(t)函數圖形,紅色
plt.plot(t,y5) #繪出i(t)函數圖形,紫色
plt.axhline(y=0)#繪出x軸
plt.axvline(x=0)#繪出y軸
plt.show() #於視窗輸出圖形
t=0;
y1=Vm*np.sin(w*t+vsi)#v(t)
y2=Im*R*np.sin(w*t+isi)#vr(t)
y3=Im*XCR*np.sin(w*t+isi-pi/2)#vc(t)
y4=Im*XLRL*np.sin(w*t+isi+pi/2)#vL(t)
y5=Im*np.sin(w*t+isi)#i(t)
print("t=0,v=%4.1f"%y1)
print("t=0,vr=%4.1f"%y2)
print("t=0,vc=%4.1f"%y3)
print("t=0,vL=%4.1f"%y4)
print("t=0,i=%4.1f"%y5)

```

自我練習

- 同範例 9-2c，但 L 改為 18mH ，重作所有子項。
- 有一 RLC 串聯電路，接於電壓為 $v(t) = 120\sqrt{2}\cos(377t - 15^\circ)\text{V}$ 之電源，經量測得知電流為 $i(t) = 6\sqrt{2}\cos(377t + 30^\circ)\text{A}$ ，則電阻兩端的電壓峰值為何？
統測110
(A) $120\sqrt{2}\text{V}$ (B) 120V (C) $100\sqrt{2}\text{V}$ (D) 100V
- 有一 RLC 串聯交流電路，若 $R = 20\Omega$ 、 $L = 10\text{mH}$ 、 $C = 100\mu\text{F}$ ，電源電壓 $v(t) = 20\sin(1000t + 30^\circ)\text{V}$ ，則下列敘述何者正確？
統測105
(A) 電源電流相位落後電源電壓相位 45°
(B) 電阻器兩端電壓 $v_R(t) = 20\sin(1000t + 30^\circ)\text{V}$
(C) 總阻抗 $\bar{Z} = 20\sqrt{2}\angle 45^\circ\Omega$
(D) 電源電流 $i(t) = 1.0\sin(1000t - 15^\circ)\text{A}$
- 如圖 (5) 所示之交流穩態電路，則電容電壓 $\bar{V}_C$ 為何？
($\sin 36.9^\circ = 0.6$ 及 $\sin 53.1^\circ = 0.8$)
統測 103
(A) $100\angle -36.9^\circ\text{V}$ (B) $100\angle -53.1^\circ\text{V}$
(C) $140\angle 53.1^\circ\text{V}$ (D) $140\angle -53.1^\circ\text{V}$

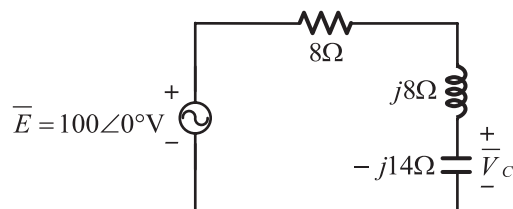


圖 (5)

5. 已知一個 RLC 串聯電路，其電源電壓為 $v(t) = 200\sqrt{2} \sin(100t) \text{ V}$ ，假設 $R = 20\Omega$ 、 $L = 150\text{mH}$ 及 $C = 500\mu\text{F}$ ，則該電路總串聯阻抗為何？統測103
(A) $20 - j5\Omega$ (B) $20 - j15\Omega$ (C) $20 + j15\Omega$ (D) $20 + j5\Omega$

分壓定則(voltage divider theorem)

前面直流電路有分壓定則，交流電的分壓定則也與直流電相同，若有交流電路如圖 9-2a，則 $\bar{V}_1$ 、 $\bar{V}_2$ 分壓公式如下：

$$\bar{V}_1 = \frac{\bar{Z}_1}{\bar{Z}_1 + \bar{Z}_2} \bar{V}$$

(公式9-2i)

$$\bar{V}_2 = \frac{\bar{Z}_2}{\bar{Z}_1 + \bar{Z}_2} \bar{V}$$

(公式9-2j)

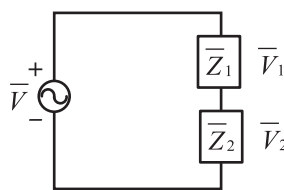


圖 9-2a 分壓定則

由以上公式可知，交流電的分壓方式與直流電相同，只是直流電採用實數表示與實數計算，交流電採用複數表示與複數計算，請看以下範例說明。

範例9-2d

電路如圖 (1)， $v(t) = 5\sqrt{2} \sin(4t + 30^\circ) \text{ V}$ ， $R = 3\Omega$ ， $L = 1\text{H}$ ，試求 $v_R(t)$ ？

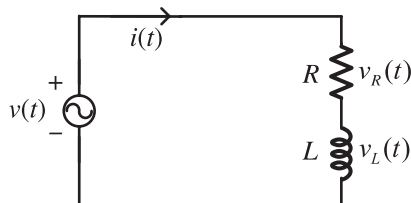


圖 (1)

解

(1) 將 $v(t)$ 正弦式轉為相量式，得到 $\bar{V} = 5\angle 30^\circ$ ， $\omega = 4$ 。

(2) $X_L = \omega L = 4\Omega \Rightarrow \bar{X}_L = j4\Omega$ 。

(3) $\bar{Z} = R + \bar{X}_L = 3 + j4 = 5\angle 53^\circ \Omega$ ，如圖 (2)。

(4) $\bar{V}_R = \frac{R}{\bar{Z}} \cdot \bar{V} = \frac{3}{5\angle 53^\circ} \cdot 5\angle 30^\circ = 3\angle -23^\circ \text{ V}$ 。

(5) $v_R(t) = 3\sqrt{2} \sin(4t - 23^\circ) \text{ V}$

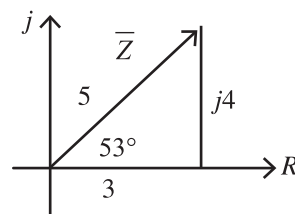


圖 (2)

(6) 以上分壓計算的 Python 程式如下：

```
import math , cmath
v=5;si=30
si=si*math.pi/180
a=v*math.cos(si)
b=v*math.sin(si)
V=complex(a,b) #將相量轉複數
m=0.001;R=3;L=1;w=4
XL=w*L;XL=complex(0,XL)
Z=R+XL
r,si=cmath.polar(Z)#複數轉極座標
si=math.degrees(si) #轉為度度量
print("/Z=%3.1f∠%3.1f" %(r,si))
VR=(R/Z)*V
r,si=cmath.polar(VR)#複數轉極座標
si=math.degrees(si) #轉為度度量
print("/VR=%3.1f∠%3.1f" %(r,si))
```

```
/Z=5.0∠53.1
/VR=3.0∠-23.1
```

圖 (3) 程式執行結果

自我練習

1. 電路如圖 (4)， $v(t) = 5\sqrt{2} \sin(t - 30^\circ) \text{ V}$ ， $R = 4\Omega$ ， $C = \frac{1}{3} \text{ F}$ ，試求 $v_C(t)$ ？
2. 電路如圖 (5)， $v(t) = 5\sqrt{2} \sin(t + 30^\circ) \text{ V}$ ， $R = 3\Omega$ ， $L = 10\text{H}$ ， $C = \frac{1}{6} \text{ F}$ ，試求 $v_L(t)$ ？
3. 如圖 (6) 所示之串聯電路，若阻抗 $\bar{Z}_1 = 5\angle 53.1^\circ \Omega$ ， $\bar{Z}_2 = 6 + j8\Omega$ ，當加上 $\bar{V}_s = 150\angle 0^\circ \text{ V}$ 之電壓時，則 $\bar{V}_2$ 為何？
($\sin 53.1^\circ = 0.8, \cos 53.1^\circ = 0.6$)
(A) $100\angle 0^\circ \text{ V}$ (B) $100\angle 53.1^\circ \text{ V}$
(C) $50\angle 0^\circ \text{ V}$ (D) $50\angle 53.1^\circ \text{ V}$

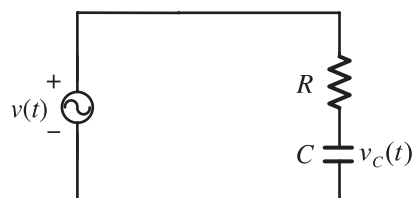


圖 (4)

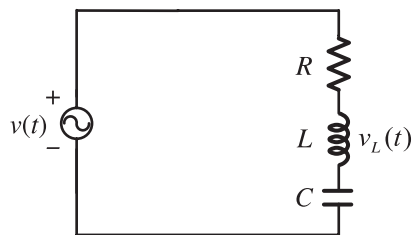


圖 (5)

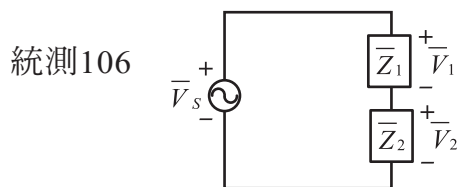


圖 (6)

統測106

9-3 電阻電容、電阻電感及電阻電感電容並聯電路

前面 9-2 節已經介紹電阻、電容、電感的交流串聯電路，本節則要介紹交流電阻電容（以下簡稱 RC）、電阻電感（以下簡稱 RL）及電阻電容電感（以下簡稱 RCL）並聯電路。並聯電路求電壓與電流的步驟如下：

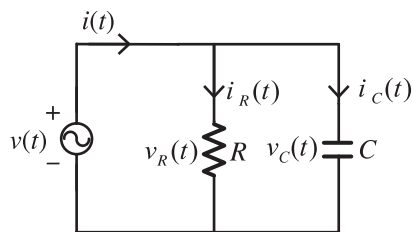
1. 計算 R ： R 僅與 R 值有關。 (公式 9-3a)
2. 計算 $\bar{X}_C$ ： $\bar{X}_C = \frac{1}{\omega C} \angle -90^\circ$ 。 (公式 9-3b)
3. 計算 $\bar{X}_L$ ： $\bar{X}_L = \omega L \angle 90^\circ$ 。 (公式 9-3c)
4. 計算 $\bar{I}_R$ ： $\bar{I}_R = \frac{\bar{V}}{R}$ 。（並聯因所有元件電壓都相同，所以先計算所有元件的電流） (公式 9-3d)
5. 計算 $\bar{I}_C$ ： $\bar{I}_C = \frac{\bar{V}}{\bar{X}_C}$ 。 (公式 9-3e)
6. 計算 $\bar{I}_L$ ： $\bar{I}_L = \frac{\bar{V}}{\bar{X}_L}$ 。 (公式 9-3f)
7. 計算 $\bar{I}$ ： $\bar{I} = \bar{I}_R + \bar{I}_C + \bar{I}_L$ 。 (公式 9-3g)
8. 計算 $\bar{Z}$ ： $\bar{Z} = \frac{\bar{V}}{\bar{I}}$ 。 (公式 9-3h)
9. 電路特性： $I_C = I_L$ （或 $X_C = X_L$ ）時，電路呈現電阻性； $I_C > I_L$ （或 $X_L > X_C$ ）時，電路呈現電容性，此時總電流超前總電壓； $I_C < I_L$ （或 $X_L < X_C$ ）時，電路呈現電感性，此時總電流落後總電壓。

以上計算方式與前面直流電阻並聯電路相同，有相同的並聯總電阻與分流定則，唯一不同的是阻抗的表示與計算方式改為複數，請看以下範例說明。

範例9-3a

如圖(1)所示 RC 並聯電路， $R=3\Omega$ ，
 $C=500\mu\text{F}$ ， $v(t)=12\sqrt{2}\sin(500t)\text{V}$ 。試求：

- (1) 電源 $\bar{V}$ (2) $\bar{X}_C$ (3) $\bar{Z}$
 (4) $\bar{I}$ (5) $\bar{I}_R$ (6) $\bar{I}_C$
 (7) $i(t)$ (8) $i_R(t)$ (9) $i_C(t)$
 (10) $\bar{V}$ 、 $\bar{I}$ 、 $\bar{I}_R$ 、 $\bar{I}_C$ 相量圖。



圖(1)

解

- (1) $\bar{V}=12\angle 0^\circ\text{V}$ 。
 (2) 元件並聯，所有元件電壓都相同，可以先求所有元件的電流

$$\bar{I}_R = \frac{\bar{V}}{R} = \frac{12\angle 0^\circ}{3} = 4\angle 0^\circ\text{A} = 4\text{A}。$$

$$(3) X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{500 \cdot 500\mu} = 4\Omega \Rightarrow \bar{X}_C = 4\angle -90^\circ\Omega。$$

$$(4) \bar{I}_C = \frac{\bar{V}}{\bar{X}_C} = \frac{12\angle 0^\circ}{4\angle -90^\circ} = 3\angle 90^\circ\text{A} = j3\text{A}。$$

$$(5) \bar{I} = \bar{I}_R + \bar{I}_C = 4 + j3 = 5\angle 37^\circ\text{A}，\text{如圖(2)}。$$

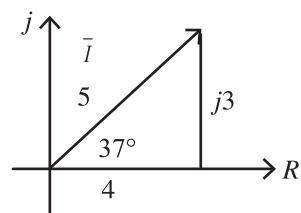
$$(6) \bar{Z} = \frac{\bar{V}}{\bar{I}} = \frac{12\angle 0^\circ}{5\angle 37^\circ} = 2.4\angle -37^\circ\Omega。$$

$$(7) i_R(t) = 4\sqrt{2}\sin(500t)\text{A}。$$

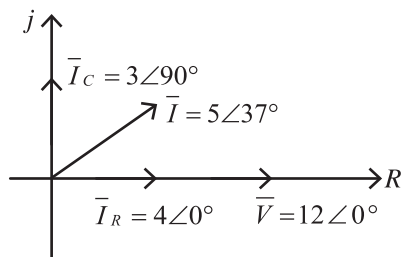
$$(8) i_C(t) = 3\sqrt{2}\sin(500t + 90^\circ)\text{A}。$$

$$(9) i(t) = 5\sqrt{2}\sin(500t + 37^\circ)\text{A}。$$

- (10) $\bar{V}$ 、 $\bar{I}$ 、 $\bar{I}_R$ 、 $\bar{I}_C$ 相量圖，如圖(3)，(請留意 $\bar{I}$ 超前 $\bar{V}$ ，為電容性電路)。



圖(2)



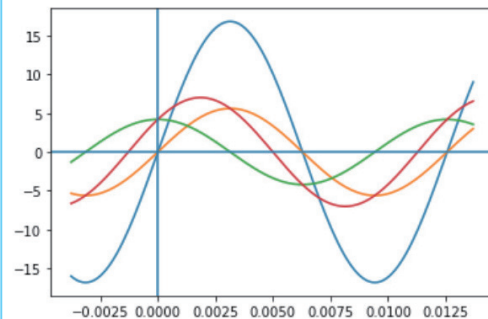
圖(3)

(11) 以上 $\bar{I}$ 、 $\bar{I}_R$ 、 $\bar{I}_C$ 、 $\bar{Z}$ 複數的計算，程式如下：

```
import matplotlib.pyplot as plt #載入繪圖模組
import numpy as np #載入numph 模組
import math , cmath
def pr(Z):
    r,si=cmath.polar(Z)#複數轉極座標
    si=math.degrees(si) #轉為度度量
    print("%3.1f∠%3.1f" %(r,si))
u=0.000001;m=0.001;pi=math.pi
Vm=12*1.4;w=500;vsi=0;
R=3;C=500*u
vsi=vsi*pi/180
a=Vm/1.4*math.cos(vsi)
b=Vm/1.4*math.sin(vsi)
V=complex(a,b) #將相量轉複數
print("/V=",end="");pr(V)
IR=V/R
print("/IR=",end="");pr(IR)
XCR=(1/(w*C));XC=complex(0,-XCR)
print("/XC=",end="");pr(XC)
IC=V/XC
print("/IC=",end="");pr(IC)
I=IR+IC
print("/I=",end="");pr(I)
Z=V/I
print("/Z=",end="");pr(Z)
T=2*pi/w;dt=T/100
t = np.arange(-0.3*T, 1.1*T,dt) #
Ir,irsi=cmath.polar(IR)#直角座標轉極座標
Ic,icsi=cmath.polar(IC)#直角座標轉極座標
I,isi=cmath.polar(I)#直角座標轉極座標
y1=Vm*np.sin(w*t+vsi)#v(t)
y2=Ir*1.4*np.sin(w*t+irsi)#ir(t)
y3=Ic*1.4*np.sin(w*t+icsi)#ic(t)
y4=I*1.4*np.sin(w*t+isi)#i(t)
plt.plot(t,y1) #繪出v(t)函數圖形,藍色
plt.plot(t,y2) #繪出ir(t)函數圖形,橘色
plt.plot(t,y3) #繪出ic(t)函數圖形,綠色
```

```
/V=12.0∠0.0
/IR=4.0∠0.0
/XC=4.0∠-90.0
/IC=3.0∠90.0
/I=5.0∠36.9
/Z=2.4∠-36.9
t=0,v= 0.0
t=0,ir= 0.0
t=0,ic= 4.2
t=0,i= 4.2
```

圖(3) 程式執行結果



圖(4) 波形圖，藍色是 $v(t)$ ，橘色是 $i_R(t)$ ，綠色是 $i_C(t)$ ，紅色是 $i(t)$

```

plt.plot(t,y4) #繪出i(t)函數圖形,紅色
plt.axhline(y=0)#繪出x軸
plt.axvline(x=0)#繪出y軸
plt.show() #於視窗輸出圖形
t=0;
y1=Vm*np.sin(w*t+vsi)#v(t)
y2=Ir*1.4*np.sin(w*t+irsi)#ir(t)
y3=Ic*1.4*np.sin(w*t+icsi)#ic(t)
y4=I*1.4*np.sin(w*t+isi)#i(t)
print("t=0,v=%4.1f"%y1)
print("t=0,ir=%4.1f"%y2)
print("t=0,ic=%4.1f"%y3)
print("t=0,i=%4.1f"%y4)

```

自我練習

1. 有一電阻 R 並聯一電容 C 之交流電路，當加入電源電壓 $v(t) = 150 \sin(1000t - 10^\circ) \text{ V}$ 時，產生的電源電流為 $i(t) = 15\sqrt{2} \sin(1000t + 35^\circ) \text{ A}$ ，試求電阻 R 及電容 C 為多少？ 統測102

- (A) $R = 100\Omega$ ， $C = 100\mu\text{F}$
 (B) $R = 100\Omega$ ， $C = 10\mu\text{F}$
 (C) $R = 10\Omega$ ， $C = 100\mu\text{F}$
 (D) $R = 10\Omega$ ， $C = 10\mu\text{F}$

範例9-3b

如圖 (1) 所示 RL 並聯交流電路，若電源電壓 $\bar{V}_s = 240 \angle 0^\circ \text{ V}$ ，則電流 $\bar{I}_s$ 為何？ 統測 111

- (A) $(15 - j20) \text{ A}$ (B) $(20 - j15) \text{ A}$
 (C) $(15 + j20) \text{ A}$ (D) $(20 + j15) \text{ A}$

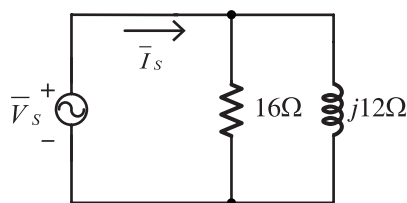


圖 (1)

解

方法一：先求各元件電流

$$(1) \bar{I}_R = \frac{\bar{V}}{R} = \frac{240 \angle 0^\circ}{16} = 15 \angle 0^\circ = 15 \text{ A}。$$

$$(2) \bar{I}_L = \frac{\bar{V}}{X_L} = \frac{240\angle 0^\circ}{12\angle 90^\circ} = 20\angle -90^\circ = -j20 \text{ A}。$$

$$(3) \bar{I}_S = \bar{I}_R + \bar{I}_L = 15 - j20 = 25\angle -53^\circ \text{ A}，$$

此為3:4:5 三角形如圖 (2)。

方法二：直接求總阻抗

$$(1) \bar{Z} = \frac{1}{\frac{1}{R} + \frac{1}{X_L}} = \frac{1}{\frac{1}{16} + \frac{1}{j12}} = \frac{1}{j12 + 6} = \frac{j192}{j12 + 16} = \frac{j48}{4 + j3}$$

$$(2) I = \frac{\bar{V}}{\bar{Z}} = \frac{240}{\frac{48j}{4 + j3}} = \frac{240(4 + j3)}{48j} = \frac{5(4 + j3) \times (-j)}{j \times (-j)} = 5(3 - j4) = 25\angle -53^\circ \text{ A}$$

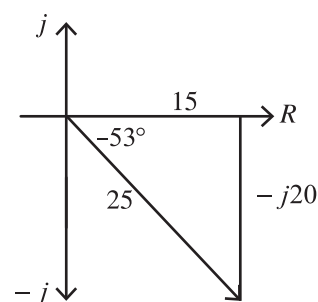


圖 (2)

方法三：複數的運算，可直接由Python程式完成，程式如下：

```
V=240
R=16
XL=12j #Python的複數,j寫在後面
Z=1/((1/R)+(1/XL))
I=V/Z
print(I)
```

執行結果如下圖：

(14.999999999999995-19.999999999999996j)

自我練習

1. 某 RL 並聯電路的電阻 $R=3\Omega$ ，電感抗 $X_L=3\Omega$ 。若總消耗電流為 $8\sin(377t)$ A，則流經電阻的電流為何？ 統測 104

(A) $4\sqrt{2}\sin(377t+45^\circ)$ A (B) $4\sqrt{2}\sin(377t-45^\circ)$ A

(C) $4\sin(377t+45^\circ)$ A (D) $4\sin(377t-45^\circ)$ A

2. 如圖 (3) 所示之交流穩態電路，電流 $\bar{I}_S$ 為何？ 統測 103

(A) $40\angle 0^\circ$ A (B) $40\angle 45^\circ$ A

(C) $20\sqrt{2}\angle 45^\circ$ A (D) $20\sqrt{2}\angle -45^\circ$ A

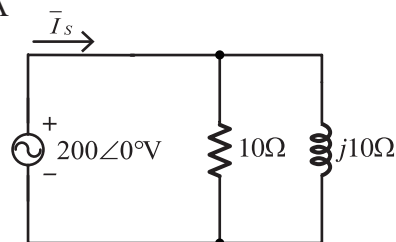
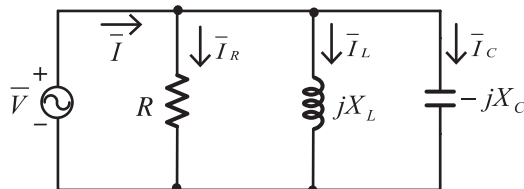


圖 (3)

範例9-3c

如圖(1)所示 RLC 並聯交流電路，已知 $\bar{V} = 100\angle 30^\circ$ ， $R = 20\Omega$ 、 $X_L = 10\Omega$ 、 $X_C = 20\Omega$ ，則下列敘述何者正確？ 統測 107

- (A) $\bar{I}_R$ 相角超前 $\bar{I}_L$ 相角 30°
 (B) $\bar{I}_C$ 相角超前 $\bar{I}_L$ 相角 90°
 (C) $\bar{I} = 5\sqrt{2}\angle -15^\circ \text{ A}$
 (D) $\bar{I}_R = 5\angle 0^\circ \text{ A}$



圖(1)

解：並聯電路，所有元件電壓都相同，可以直接求每一元件的電流：

$$(1) \bar{I}_R = \frac{\bar{V}}{R} = \frac{100\angle 30^\circ}{20} = 5\angle 30^\circ \text{ A}。$$

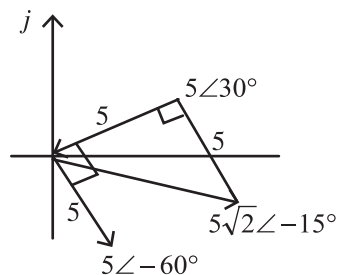
$$(2) \bar{I}_L = \frac{\bar{V}}{X_L} = \frac{100\angle 30^\circ}{10\angle 90^\circ} = 10\angle -60^\circ \text{ A}，\bar{I}_R \text{ 超前 } \bar{I}_L 90^\circ。$$

$$(3) \bar{I}_C = \frac{\bar{V}}{X_C} = \frac{100\angle 30^\circ}{20\angle -90^\circ} = 5\angle 120^\circ \text{ A} = -5\angle -60^\circ \text{ A}。$$

$$(4) \bar{I} = \bar{I}_R + \bar{I}_L + \bar{I}_C = 5\angle 30^\circ + 10\angle -60^\circ - 5\angle -60^\circ$$

$$= 5\angle 30^\circ + 5\angle -60^\circ = 5\sqrt{2}\angle -15^\circ \text{ A}$$

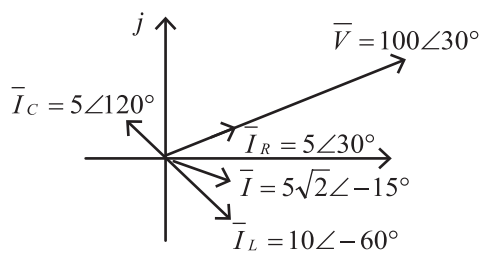
(平行四邊行法， $5\angle 30^\circ$ 與 $5\angle -60^\circ$ 剛好構成正方形，所以斜邊是 $5\sqrt{2}\angle -15^\circ$ 如圖(2))。



圖(2)

- (5) $\bar{V}$ 、 $\bar{I}_R$ 、 $\bar{I}_L$ 、 $\bar{I}_C$ 、 $\bar{I}$ 的相量圖，如圖(3)，此時 $\bar{I}$ 落後 $\bar{V}$ ，電路呈現電感性。

- (6) 以上 $\bar{I}_R$ 、 $\bar{I}_C$ 、 $\bar{I}_L$ 、 $\bar{I}$ 及 $\bar{Z}$ 複數的計算，Python 程式如下：



圖(3)


```

import math , cmath
def pr(Z):
    r,si=cmath.polar(Z)#複數轉極座標
    si=math.degrees(si) #轉為度度量
    print("%3.1f∠%3.1f" %(r,si))
u=0.000001;m=0.001;pi=math.pi
V=100;vsi=30;
R=20;XL=10j;XC=-20j
vsi=vsi*pi/180
a=V*math.cos(vsi)
b=V*math.sin(vsi)
V=complex(a,b) #將相量轉複數
print("/V=",end="");pr(V)
IR=V/R
print("/IR=",end="");pr(IR)
IL=V/XL
print("/IL=",end="");pr(IL)
IC=V/XC
print("/IC=",end="");pr(IC)
I=IR+IC+IL
print("/I=",end="");pr(I)
Z=V/I
print("/Z=",end="");pr(Z)

```

```

/V=100.0∠30.0
/IR=5.0∠30.0
/IL=10.0∠-60.0
/IC=5.0∠120.0
/I=7.1∠-15.0
/Z=14.1∠45.0

```

圖(4) 程式執行結果

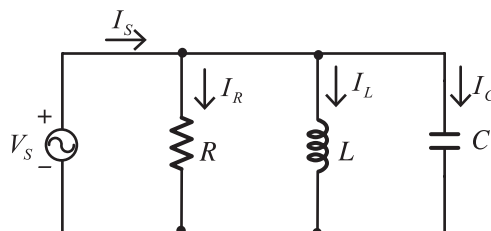
(7) 執行結果如圖(4)。

範例9-3d

如圖(1)所示之交流穩態電路，已知各支路電流有效值為 $I_S=30\text{A}$ 、 $I_R=24\text{A}$ 、 $I_C=6\text{A}$ ，則電感電流有效值 I_L 為何？

統測 110

- (A) 0A
- (B) 18A
- (C) 24A
- (D) 30A



圖(1)

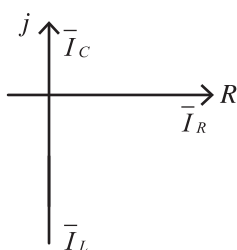
解

(1) 因為 $\bar{I}_C$ 與 $\bar{I}_L$ 相位相差 180° 如圖(2)，合相量與 $\bar{I}_R$ 垂直，如圖(3)。所以， $\bar{I}_R$ 、 $\bar{I}_L - \bar{I}_C$ 與 $\bar{I}_S$ 的有效值滿足畢式定理：

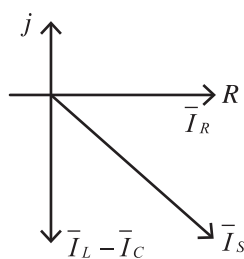
$$I_R^2 + (\bar{I}_L - \bar{I}_C)^2 = I_S^2 \Rightarrow 24^2 + (I_L - 6)^2 = 30^2$$

$$\Rightarrow 576 + (I_L - 6)^2 = 900$$

$$(I_L - 6)^2 = 324 = 18^2 \Rightarrow I_L - 6 = \pm 18 \Rightarrow I_L = 24, -12 \text{ (負不合，答案選 C)}$$



圖(2)



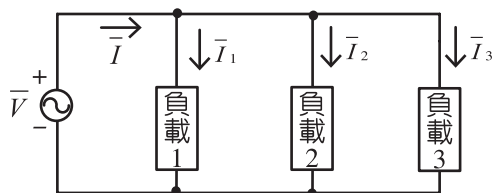
圖(3)

自我練習

1. 如圖(4)所示之交流正弦波電路，負載1、負載2及負載3皆為 RLC 組合之被動電路，若 $\bar{V} = 100\sqrt{2}\angle 45^\circ \text{ V}$ 、 $\bar{I} = 200\sqrt{2}\angle 45^\circ \text{ A}$ 、 $\bar{I}_1 = 100 \text{ A}$ 、 $\bar{I}_2 = 100\angle 90^\circ \text{ A}$ ，則下列敘述何者正確？

統測107

- (A) 負載1為純電感性負載
(B) 負載2為純電容性負載
(C) 負載3為純電阻性負載
(D) 負載1為純電阻性負載



圖(4)

2. 有一交流電源供給 RLC 並聯電路，若 $R = 10\Omega$ ， $X_L = 5\Omega$ ， $X_C = 10\Omega$ ，則電源電流與電源電壓的相位關係為何？

統測 106

- (A) 電流相位落後電壓相位
(B) 電流相位超前電壓相位
(C) 電流與電壓同相位
(D) 無法判斷

導納

關於並聯電路的電壓與電流計算，前面是先計算所有元件的電流，求得總電流，再計算總阻抗。以下將介紹使用導納 (admittance) 求解。

因為並聯電路的總阻抗倒數等於所組成元件的阻抗倒數之和，為了方便計算，通常將電阻值 (R)、電容抗 ($\bar{X}_C$)、電感抗 ($\bar{X}_L$)、阻抗 ($\bar{Z}$) 的倒數定義為電導 (conductance)、電容納 (capacitive susceptance)、電感納 (inductive susceptance)、導納 (admittance)。以上定義如下：

$$1. \text{ 電導 } G = \frac{1}{R} \text{ 。 (西門, S) } \quad (\text{公式 9-3i})$$

$$2. \text{ 電容納 } \bar{B}_C = \frac{1}{\bar{X}_C} = \frac{1}{X_C \angle -90^\circ} = B_C \angle 90^\circ = jB_C \text{ 。 (西門, S) } \quad (\text{公式 9-3j})$$

$$3. \text{ 電感納 } \bar{B}_L = \frac{1}{\bar{X}_L} = \frac{1}{X_L \angle 90^\circ} = B_L \angle -90^\circ = -jB_L \text{ 。 (西門, S) } \quad (\text{公式 9-3k})$$

$$4. \text{ 導納 } \bar{Y} = \frac{1}{\bar{Z}} = G + \bar{B}_C + \bar{B}_L \text{ 。 (西門, S) } \quad (\text{公式 9-3l})$$

有了以上定義與導納計算，並聯電路的總電流 $\bar{I}$ 與分支電流 $\bar{I}_R$ 、 $\bar{I}_C$ 、 $\bar{I}_L$ 的公式如下：

$$\bar{I} = \bar{V} \bar{Y} \quad (\text{公式 9-3m})$$

$$\bar{I}_R = \bar{V} \bar{G} \quad (\text{公式 9-3n})$$

$$\bar{I}_C = \bar{V} \bar{B}_C \quad (\text{公式 9-3o})$$

$$\bar{I}_L = \bar{V} \bar{B}_L \quad (\text{公式 9-3p})$$

以上關於導納的定義及電流的計算，請看以下範例說明。

範例9-3e

同範例 9-3a，但改以先求電導 G ，電容納 ($\bar{B}_C$) 及導納 ($\bar{Y}$) 的方式求解。

解

$$(1) \bar{V} = 12 \angle 0^\circ \text{ 。}$$

$$(2) \text{ 電導 } G = \frac{1}{R} = \frac{1}{3} \text{ S}。$$

$$(3) X_C = \frac{1}{\omega C} = 4 \Omega \Rightarrow \bar{X}_C = 4 \angle -90^\circ \Omega, \text{ 電容納 } \bar{B}_C = \frac{1}{\bar{X}_C} = \frac{1}{4} \angle 90^\circ \text{ S} = j \frac{1}{4} \text{ S}。$$

$$(4) \text{ 導納 } \bar{Y} = G + \bar{B}_C = \frac{1}{3} + j \frac{1}{4} = \frac{1}{12} (4 + j3) = \frac{5}{12} \angle 37^\circ \text{ S}$$

(如圖(1))。

$$(5) \bar{I}_R = \bar{V} \bar{G} = 12 \cdot \frac{1}{3} = 4 \text{ A}。$$

$$(6) \bar{I}_C = \bar{V} \bar{B}_C = 12 \angle 0^\circ \cdot \frac{1}{4} \angle 90^\circ = 3 \angle 90^\circ \text{ A}。$$

$$(7) \bar{I} = \bar{V} \bar{Y} = 12 \angle 0^\circ \cdot \frac{5}{12} \angle 37^\circ = 5 \angle 37^\circ \text{ A}。$$

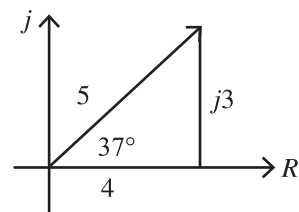


圖 (1)

範例9-3f

同範例 9-3c，但改以先求導納的方式求解。

解

$$(1) G = \frac{1}{R} = \frac{1}{20} \text{ S}。$$

$$(2) \bar{B}_L = \frac{1}{\bar{X}_L} = \frac{1}{10 \angle 90^\circ} = \frac{1}{10} \angle -90^\circ = -j \frac{1}{10} \text{ S}。$$

$$(3) \bar{B}_C = \frac{1}{\bar{X}_C} = \frac{1}{20 \angle -90^\circ} = \frac{1}{20} \angle 90^\circ = j \frac{1}{20} \text{ S}。$$

$$(4) \bar{Y} = G + \bar{B}_L + \bar{B}_C = \frac{1}{20} - j \frac{1}{10} + j \frac{1}{20} = \frac{1}{20} - j \frac{1}{20} = \frac{1}{20} (1 - j) = \frac{\sqrt{2}}{20} \angle -45^\circ \text{ S}，$$

如圖(1)。

$$(5) \bar{I} = \bar{V} \bar{Y} = 100 \angle 30^\circ \times \frac{\sqrt{2}}{20} \angle -45^\circ = 5\sqrt{2} \angle -15^\circ \text{ A (選C)}。$$

$$(6) \bar{I}_L = \bar{V} \bar{B}_L = 100 \angle 30^\circ \times \frac{1}{10} \angle -90^\circ = 10 \angle -60^\circ \text{ A}。$$

$$(7) \bar{I}_R = \bar{V} \cdot G = 100 \angle 30^\circ \times \frac{1}{20} = 5 \angle 30^\circ \text{ (超前 } \bar{I}_L 60^\circ \text{)}。$$

$$(8) \bar{I}_C = \bar{V} \bar{B}_C = 100 \angle 30^\circ \times \frac{1}{20} \angle 90^\circ = 5 \angle 120^\circ \text{ A (超前 } \bar{I}_L 180^\circ \text{)}。$$

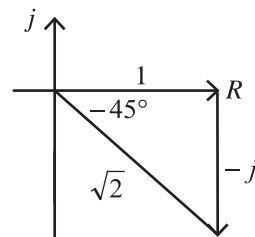


圖 (1)

分流定則(current divider theorem)

交流並聯電路的電流分配定則與直流電路相同，都是與自己的阻抗成反比。如圖 9-3a 所示的並聯電路，其電流分流定則公式如下：

$$\bar{I}_1 = \frac{\bar{Z}_2}{\bar{Z}_1 + \bar{Z}_2} \bar{I} \quad (\text{公式9-3q})$$

$$\bar{I}_2 = \frac{\bar{Z}_1}{\bar{Z}_1 + \bar{Z}_2} \bar{I} \quad (\text{公式9-3r})$$

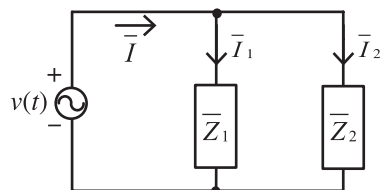


圖 9-3a 分流定則

也就是直流電路是實數運算，交流電路是複數運算，請看以下範例說明。

範例9-3g

如圖 (1) 所示電路， $i(t) = 5\sqrt{2} \sin(100t + 30^\circ) \text{ A}$ ， $R = 4\Omega$ 、 $X_L = 3\Omega$ ，求 $i_R(t)$ 之值？

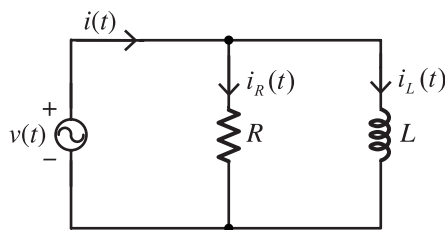


圖 (1)

解

(1) 由 $i(t) = 5\sqrt{2} \sin(100t + 30^\circ) \text{ A}$ 得到 $\bar{I} = 5\angle 30^\circ \text{ A}$ 。

(2) 由電流分配定則 $\bar{I}_R = \frac{\bar{X}_L}{R + \bar{X}_L} \cdot \bar{I} = \frac{j3}{4 + j3} \times 5\angle 30^\circ$ ，

$4 + j3$ 如圖 (2)，轉為極座標是 $5\angle 37^\circ$ 。

$$= \frac{3\angle 90^\circ}{5\angle 37^\circ} \cdot 5\angle 30^\circ = 3\angle 83^\circ \text{ A}$$

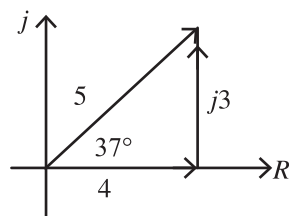


圖 (2)

(3) 將相量式轉回正弦式，得到 $i_R(t) = 3\sqrt{2} \sin(100t + 83^\circ) \text{ A}$ 。

自我練習

1. 如圖 (3) 所示之電路，
 $i(t) = 5\sqrt{2} \cos(100t)$ ， $R = 3\Omega$ ， $X_C = 4\Omega$ ，
 求 $i_C(t)$ 之值？
2. 有一 RLC 並聯交流電路，若 $R = 10\Omega$ 、
 $L = 10\text{mH}$ 、總導納 $\bar{Y} = (\sqrt{2}/10)\angle 45^\circ \text{ S}$ ，
 電源電壓 $v(t) = 10\sin(1000t + 30^\circ) \text{ V}$ ，則
 下列敘述何者正確？

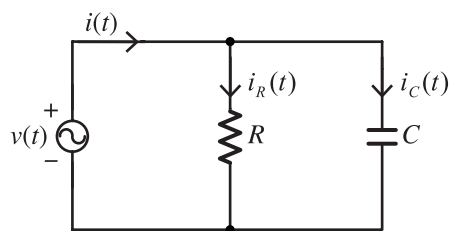


圖 (3)

統測105

- (A) 流經電感器的電流 $i_L(t) = 1.0\sin(100t - 60^\circ) \text{ A}$
 (B) 電容 $C = 20\mu\text{F}$
 (C) 此電路為電容性電路
 (D) 電源電流 $i(t) = 50\sqrt{2}\sin(1000t - 15^\circ) \text{ A}$

9-4 電阻電感電容串並聯電路

交流電路電阻電感電容的串並聯計算與前面直流電路的串並聯相同，一樣遵守相同的歐姆定律、相同的 KVL、相同的 KCL，差別在交流元件多了電容與電感，還有計算方式，直流電採用實數運算，交流電則使用複數運算，請看以下範例說明。

範例9-4a

如圖 (1) 所示之交流穩態電路，若 $v(t) = 10\sqrt{2} \cos(2t) \text{ V}$ ，則流經 12Ω 電阻之電流有效值為何？

統測 112

- (A) 0.5A (B) 2A
(C) 4A (D) 6A

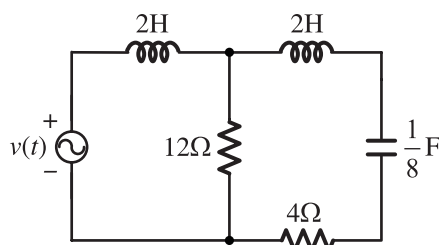


圖 (1)

解

(1) $v(t) = 10\sqrt{2} \cos(2t) = 10\sqrt{2} \sin(2t + 90^\circ) \Rightarrow \bar{V} = 10\angle 90^\circ \text{ V}$ ， $\omega = 2$ 。

(2) $X_L = \omega L = 2 \times 2 = 4\Omega$ ， $\bar{X}_L = 4\angle 90^\circ = j4\Omega$ 。

(3) $X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{2 \cdot \frac{1}{8}} = 4\Omega$ ， $\bar{X}_C = 4\angle -90^\circ = -j4\Omega$ 。

(4) $\bar{Z} = j4 + (12 \parallel (j4 - j4 + 4)) = j4 + 3 = 5\angle 37^\circ \Omega$ ，
如圖 (2)。

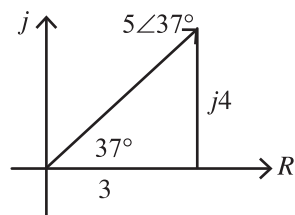


圖 (2)

(5) $\bar{V} = 10\angle 90^\circ \text{ V}$ 。

(6) $\bar{I} = \frac{\bar{V}}{\bar{Z}} = \frac{10\angle 90^\circ}{5\angle 37^\circ} = 2\angle 53^\circ \text{ A}$

(7) $\bar{I}_{12\Omega} = \frac{(j4 - j4 + 4)}{12 + (j4 - j4 + 4)} \times \bar{I}$ (分流定則)
 $= \frac{4}{12 + 4} \cdot 2\angle 53^\circ$
 $= 0.5\angle 53^\circ \text{ A}$ (答案選A)。

自我練習

1. 如圖 (3) 所示交流電路，其 a 、 b 兩端阻抗 $\bar{Z}_{ab}$ 為何？ 統測 111

- (A) 4Ω
 (B) $(4 + j4)\Omega$
 (C) $(4 - j4)\Omega$
 (D) $(4 - j8)\Omega$

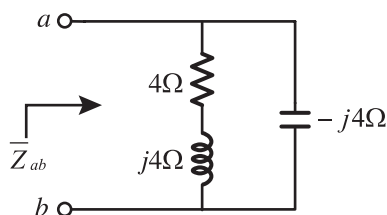


圖 (3)

2. 如圖 (4) 所示之電路，若 $v_s(t) = 100\sqrt{2} \sin(377t) \text{ V}$ ，則 $v_1(t)$ 為何？ 統測 110

- (A) $25 \sin(377t - 30^\circ) \text{ V}$
 (B) $25 \sin(377t - 45^\circ) \text{ V}$
 (C) $50 \sin(377t - 30^\circ) \text{ V}$
 (D) $50 \sin(377t - 45^\circ) \text{ V}$

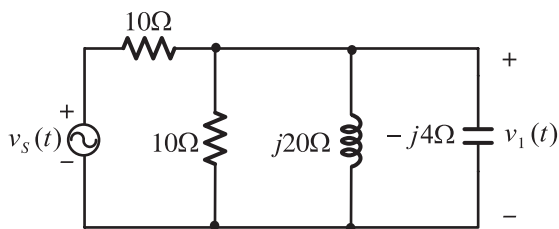


圖 (4)

3. 如圖 (5) 所示之電路，若 $v(t) = 20\sqrt{2} \sin(5t) \text{ V}$ ，則電路總電流 $i(t)$ 為何？

統測 108

- (A) $2 \sin(5t + 45^\circ) \text{ A}$
 (B) $2 \sin(5t - 45^\circ) \text{ A}$
 (C) $2\sqrt{2} \sin(5t - 45^\circ) \text{ A}$
 (D) $2\sqrt{2} \sin(5t + 45^\circ) \text{ A}$

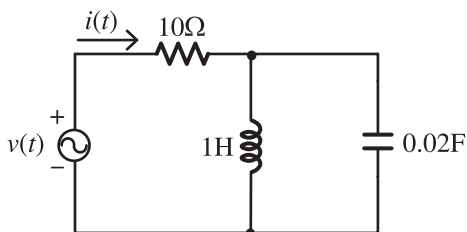


圖 (5)

範例 9-4b

如圖 (1) 所示之電路，若 R 、 X_L 、 X_{C1} 、 X_{C2} 之阻抗值皆為 2Ω ，則電路中電感抗 X_L 兩端之電壓大小為何？ 統測 108

- (A) 5V (B) 15V (C) 20V (D) 30V

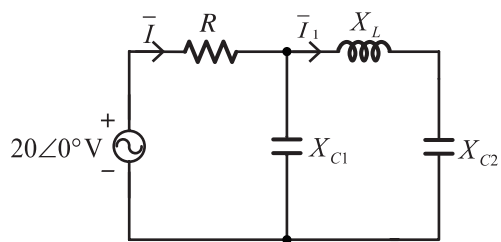


圖 (1)

解

(1) $\bar{Z} = 2 + (-j2 // (j2 - j2)) = 2\Omega$ 。

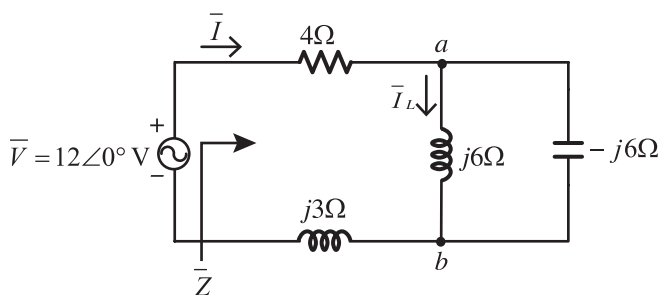
(2) $\bar{I} = \frac{\bar{V}}{\bar{Z}} = \frac{20\angle 0^\circ}{2} = 10\angle 0^\circ \text{ A}$ 。

(3) 依據分流定則： $\bar{I}_1 = \frac{-j2}{-j2} \times \bar{I} = \bar{I}$

(4) $\bar{V}(X_L \text{端電壓}) = \bar{I} \cdot \bar{X}_L = 10\angle 0^\circ \cdot 2\angle 90^\circ = 20\angle 90^\circ \text{ V}$ (答案C)。

自我練習

1. 如圖(2)所示之 RLC 串並聯交流電路，試問下列敘述何者正確？ 統測105



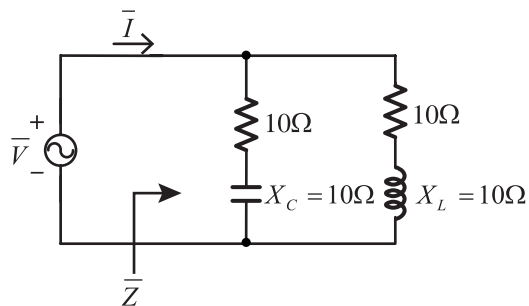
圖(2)

- (A) 流經電感器的電流 $\bar{I}_L = 2\angle -90^\circ \text{ A}$
 (B) a 、 b 兩端電壓 $\bar{V}_{ab} = 7.2\angle 53.1^\circ \text{ V}$
 (C) 電源電流 $\bar{I} = 2.4\angle -36.9^\circ \text{ A}$
 (D) 總阻抗 $\bar{Z} = 5\angle 36.9^\circ \Omega$

範例9-4c

如圖(1)所示電路，若 $\bar{V} = 100\angle 0^\circ \text{ V}$ ，則下列敘述何者正確？ 統測109

- (A) $\bar{I} = 10\angle 0^\circ \text{ A}$
 (B) $\bar{Z} = 10\angle 45^\circ \Omega$
 (C) 電路呈電感性
 (D) $\bar{I}$ 的相位超前 $\bar{V}$



圖(1)

解

$$\begin{aligned} (1) \quad \bar{Z} &= (R + \bar{X}_C) // (R + \bar{X}_L) = (10 - j10) // (10 + j10) \\ &= \frac{10\sqrt{2}\angle -45^\circ \cdot 10\sqrt{2}\angle 45^\circ}{10 - j10 + 10 + j10} = \frac{200}{20} = 10\Omega \quad (\text{電阻性}, \bar{I} \text{ 與 } \bar{V} \text{ 同相}) \end{aligned}$$

$$(2) \bar{I} = \frac{\bar{V}}{\bar{Z}} = \frac{100\angle 0^\circ}{10} = 10\angle 0^\circ \text{ A (答案A)}$$

串聯電路轉為並聯電路

圖 9-4a 串聯電路的阻抗是 $\bar{Z}_1 = 2 + j4$ 與圖 9-4b 的並聯電路阻抗是 $\bar{Z}_2 = \frac{10 \times j5}{10 + j5} = 2 + j4$ ，左右兩電路總阻抗相同，所以此二電路等效。

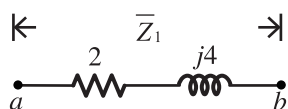


圖 9-4a

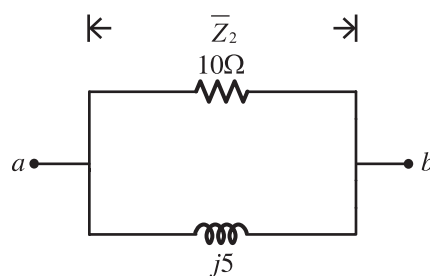


圖 9-4b

以下我們推導以上電路的轉換公式，設有串聯電路如圖 9-4c，其等效並聯電路如圖 9-4d。



圖 9-4c

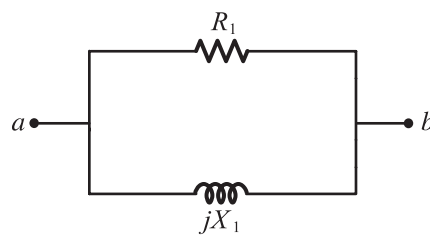


圖 9-4d

1. 圖 9-4c 的總阻抗 $\bar{Z} = R + jX$ ，將 $\bar{Z}$ 取倒數得到

$$\bar{Y} = \frac{1}{\bar{Z}} = \frac{1}{R + jX} = \frac{R - jX}{R^2 + X^2} = \frac{R}{R^2 + X^2} + \frac{-jX}{R^2 + X^2}$$

2. 圖 9-4d 的並聯電路若以導納表示，則

$$\bar{Y} = G + \bar{B} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{jX_1} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{jX_1} = \frac{1}{R_1} + \frac{-jX_1}{(X_1)^2} = \frac{1}{R_1} + \frac{-j}{X_1}$$

3. 圖 9-4d 與圖 9-4c 既然等效，所以

$$R_1 = \frac{R^2 + X^2}{R}$$

(公式9-4a)

$$X_1 = \frac{R^2 + X^2}{X}$$

(公式9-4b)

範例9-4d

如圖 (1) 由電阻 $R=2\Omega$ 及電抗 $X=4\Omega$ 串聯組成的 RL 串聯電路，將其轉換為並聯電路，如圖 (2)，則 R_1 與 X_1 分別為何？



圖 (1)

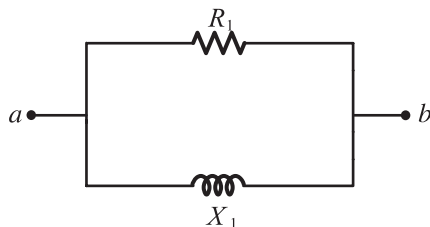


圖 (2)

解

方法一：由公式 9-4a

$$R_1 = \frac{R^2 + X^2}{R} = \frac{2^2 + 4^2}{2} = 10\Omega$$

$$X_1 = \frac{R^2 + X^2}{X} = \frac{2^2 + 4^2}{4} = 5\Omega$$

方法二：當場自己推導。

(1) 圖 (1) 的 $\bar{Z} = 2 + j4$ 。

$$(2) \text{ 求 } \bar{Z} \text{ 倒數 } \bar{Y} : \bar{Y} = \frac{1}{\bar{Z}} = \frac{1}{2 + j4} = \frac{2 - j4}{20} = \frac{2}{20} + \frac{-j4}{20} = \frac{1}{\frac{20}{2}} + \frac{-j}{\frac{20}{4}}$$

(3) 依照並聯導納定義 $\bar{Y} = \frac{1}{R} + \frac{-j}{X_L}$ ，此為 $R = \frac{20}{2} = 10\Omega$ 與 $X = \frac{20}{4} = 5\Omega$ 並聯的電路導納。

自我練習

1. 若有一串聯電路如圖 (3)， $R=6\Omega$ ， $X_C=2\Omega$ ，其並聯等效電路如圖 (4)，求 R_1 與 X_1 之值？並驗算兩邊阻抗是否相同。



圖 (3)

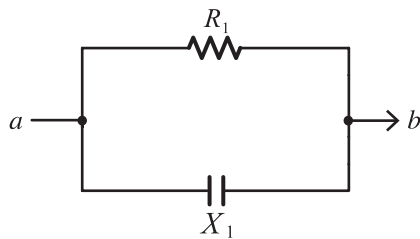


圖 (4)

並聯電路轉為串聯電路

圖 9-4e 並聯電路的阻抗 $\bar{Z}_1 = \frac{10 \cdot j10}{10 + j10} = 5 + j5$ ，圖 9-4f 的阻抗 $\bar{Z}_L = 5 + j5$ ，兩者總阻抗相同，稱為等效電路，兩者可互換。

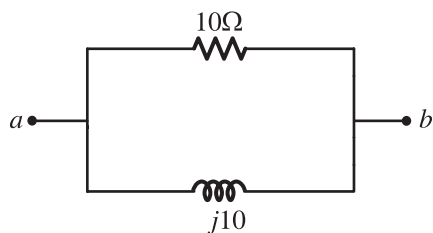


圖 9-4e



圖 9-4f

以下我們推導以上電路的轉換公式，設有串聯電路如圖 9-4g，其等效電路如圖 9-4h。

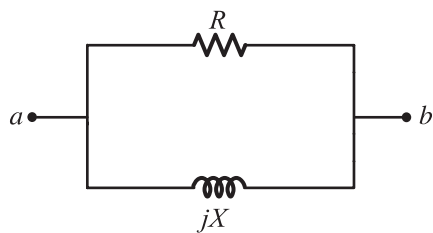


圖 9-4g



圖 9-4h

$$\begin{aligned}
 1. \text{ 圖 9-4g 的阻抗 } \bar{Z} &= R // jX = \frac{R \cdot jX}{R + jX} = \frac{jRX(R - jX)}{R^2 + X^2} \\
 &= \frac{RX^2}{R^2 + X^2} + \frac{jR^2X}{R^2 + X^2}
 \end{aligned}$$

2. 圖 9-4h 既然與圖 9-4g 等效，表示：

$$R_1 = \frac{RX^2}{R^2 + X^2}$$

(公式9-4c)

$$X_1 = \frac{R^2X}{R^2 + X^2}$$

(公式9-4d)

範例9-4e

由電阻 $R_p = 10\Omega$ 及電抗 $X_p = 10\Omega$ 並聯組成之 RC 電路，將其轉換成電阻 R_s 與電抗 X_s 串聯之等效電路，則其值分別為何？ 統測 106

- (A) $R_s = 20\Omega$, $X_s = 20\Omega$ (B) $R_s = 10\Omega$, $X_s = 10\Omega$
 (C) $R_s = 5\Omega$, $X_s = 5\Omega$ (D) $R_s = 0.1\Omega$, $X_s = 0.1\Omega$

解

方法一：依據公式 9-4c 與 9-4d

$$R_s = \frac{RX^2}{R^2 + X^2} = \frac{10 \cdot (10^2)}{(10)^2 + (10)^2} = 5\Omega$$

$$X_s = \frac{R^2 X}{R^2 + X^2} = \frac{10^2 \cdot 10}{10^2 + 10^2} = 5\Omega$$

方法二：直接求 R_p 與 X_p 並聯的總電阻：

$$\begin{aligned}\bar{Z} &= \frac{R \cdot \bar{X}_C}{R + \bar{X}_C} = \frac{10 \cdot -j10}{10 - j10} = \frac{-j100(10 + j10)}{200} = -j5(1 + j) = -j(5 + j5) \\ &= 5 - j5 \Rightarrow R_s = 5\Omega \quad X_s = 5\Omega\end{aligned}$$

補充說明

1. 由範例 9-4d 與 9-4e 得到一個結論，求等效電路，遇到串聯，就求其倒數，遇到並聯，就使用並聯公式，都是從左邊的已知，往右邊推導。

自我練習

1. 由電阻 $R = 3\Omega$, $X_L = 4\Omega$ 組成的並聯電路如圖 (1)，其串聯等效電路，如圖 (2)，求 R_s 與 X_s 之值？

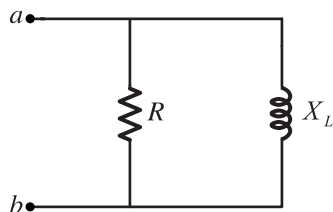


圖 (1)



圖 (2)

9-5 本章內容摘要

1. 純電阻交流電路的電阻值 $R=R$ (單位 Ω)，與角速度 ω 無關。
2. 純電容交流電路的電容抗 $\bar{X}_C = -j \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{\omega C} \angle -90^\circ$ (單位是 Ω)
3. 純電感交流電路的電感抗 $\bar{X}_L = j\omega L = \omega L \angle 90^\circ$ (單位是 Ω)
4. RCL 串聯電路求解步驟如下：
 - (1) 計算 R ： R 僅與 R 值有關，不會隨著角速度 ω 更動。 (公式 9-2a)
 - (2) 計算 $\bar{X}_C$ ： $\bar{X}_C = \frac{1}{\omega C} \angle -90^\circ \Omega$ 。 (公式 9-2b)
 - (3) 計算 $\bar{X}_L$ ： $\bar{X}_L = \omega L \angle 90^\circ \Omega$ 。 (公式 9-2c)
 - (4) 計算 $\bar{Z}$ ： $\bar{Z} = R + \bar{X}_C + \bar{X}_L$ 。 (公式 9-2d)
 - (5) 計算 $\bar{I}$ ： $\bar{I} = \frac{\bar{V}}{\bar{Z}}$ 。 (公式 9-2e)
 - (6) 計算 $\bar{V}_R$ ： $\bar{V}_R = \bar{I}R$ 。 (公式 9-2f)
 - (7) 計算 $\bar{V}_C$ ： $\bar{V}_C = \bar{I}\bar{X}_C$ 。 (公式 9-2g)
 - (8) 計算 $\bar{V}_L$ ： $\bar{V}_L = \bar{I}\bar{X}_L$ 。 (公式 9-2h)
 - (9) 電路特性： $X_L = X_C$ 時，電路是電阻性； $X_L > X_C$ 時，電路是電感性，此時電流落後總電壓； $X_L < X_C$ 時，電路是電容性，此時電流超前總電壓。(並聯是 $I_C > I_L$ 時為電容性)

5. 如圖 9-5a 的串聯電路，則分壓定則如下：

$$\bar{V}_1 = \frac{\bar{Z}_1}{\bar{Z}_1 + \bar{Z}_2} \bar{V} \quad (\text{公式 9-2i})$$

$$\bar{V}_2 = \frac{\bar{Z}_2}{\bar{Z}_1 + \bar{Z}_2} \bar{V} \quad (\text{公式 9-2j})$$

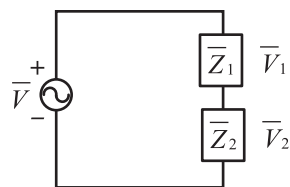


圖 9-5a 分壓定則

6. RCL 並聯電路，使用 R 、 $\bar{X}_C$ 、 $\bar{X}_L$ 求解步驟如下：
 - (1) 計算 R ： R 僅與 R 值有關。 (公式 9-3a)
 - (2) 計算 $\bar{X}_C$ ： $\bar{X}_C = \frac{1}{\omega C} \angle -90^\circ$ 。 (公式 9-3b)
 - (3) 計算 $\bar{X}_L$ ： $\bar{X}_L = \omega L \angle 90^\circ$ 。 (公式 9-3c)
 - (4) 計算 $\bar{I}_R$ ： $\bar{I}_R = \frac{\bar{V}}{R}$ 。(並聯因所有元件電壓都相同，所以先計算所有元件的電流) (公式 9-3d)

$$(5) \text{ 計算 } \bar{I}_C : \bar{I}_C = \frac{\bar{V}}{\bar{X}_C} \circ$$

(公式 9-3e)

$$(6) \text{ 計算 } \bar{I}_L : \bar{I}_L = \frac{\bar{V}}{\bar{X}_L} \circ$$

(公式 9-3f)

$$(7) \text{ 計算 } \bar{I} : \bar{I} = \bar{I}_R + \bar{I}_C + \bar{I}_L \circ$$

(公式 9-3g)

$$(8) \text{ 計算 } \bar{Z} : \bar{Z} = \frac{\bar{V}}{\bar{I}} \circ$$

(公式 9-3h)

(9) 電路特性： $I_C = I_L$ （或 $X_C = X_L$ ）時，電路呈現電阻性； $I_C > I_L$ （或 $X_L > X_C$ ）時，電路呈現電容性，此時總電流超前總電壓； $I_C < I_L$ （或 $\bar{X}_L < \bar{X}_C$ ）時，電路呈現電感性，此時總電流落後總電壓。（串聯是 $X_C > X_L$ 是電容性）

7. RCL 並聯電路，使用電導 G 、電納 $\bar{B}$ 、導納 $\bar{Y}$ 的求解步驟如下：

$$(1) \text{ 計算電導：} G = \frac{1}{R} \circ (\text{西門，S})$$

(公式 9-3i)

$$(2) \text{ 計算電容納：} \bar{B}_C = \frac{1}{\bar{X}_C} = \frac{1}{X_C \angle -90^\circ} = B_C \angle 90^\circ = jB_C \circ (\text{西門，S})$$

(公式 9-3j)

$$(3) \text{ 計算電感納：} \bar{B}_L = \frac{1}{\bar{X}_L} = \frac{1}{X_L \angle 90^\circ} = B_L \angle -90^\circ = -jB_L \circ (\text{西門，S})$$

(公式 9-3k)

$$(4) \text{ 計算導納：} \bar{Y} = \frac{1}{\bar{Z}} = G + \bar{B}_C + \bar{B}_L \circ (\text{西門，S})$$

(公式 9-3l)

有了以上定義與導納計算，並聯電路的總電流 $\bar{I}$ 與分支電流 $\bar{I}_R$ 、 $\bar{I}_C$ 、 $\bar{I}_L$ 的公式如下：

$$\bar{I} = \bar{V} \bar{Y}$$

(公式 9-3m)

$$\bar{I}_R = \bar{V} G$$

(公式 9-3n)

$$\bar{I}_C = \bar{V} \bar{B}_C$$

(公式 9-3o)

$$\bar{I}_L = \bar{V} \bar{B}_L$$

(公式 9-3p)

8. 如圖 9-5b 所示並聯電路，則其電流分流定則如下：

$$\bar{I}_1 = \frac{\bar{Z}_2}{\bar{Z}_1 + \bar{Z}_2} \bar{I}$$

(公式 9-3q)

$$\bar{I}_2 = \frac{\bar{Z}_1}{\bar{Z}_1 + \bar{Z}_2} \bar{I}$$

(公式 9-3r)

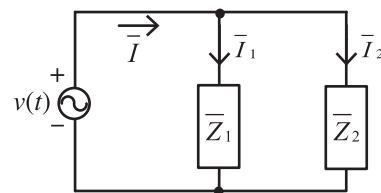


圖 9-5b 分流定則

9. 如圖 9-5c 的串聯電路，其等效並聯電路如圖 9-5d，則

$$R_1 = \frac{R^2 + X^2}{R} \quad (\text{公式9-4a})$$

$$X_1 = \frac{R^2 + X^2}{X} \quad (\text{公式9-4b})$$



圖 9-5c

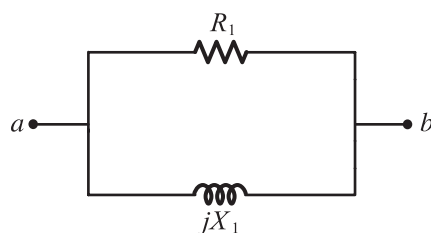


圖 9-5d

10. 如圖 9-5e 的並聯電路，其等效串聯電路如圖 9-5f，則

$$R_1 = \frac{RX^2}{R^2 + X^2} \quad (\text{公式9-4c})$$

$$X_1 = \frac{R^2 X}{R^2 + X^2} \quad (\text{公式9-4d})$$

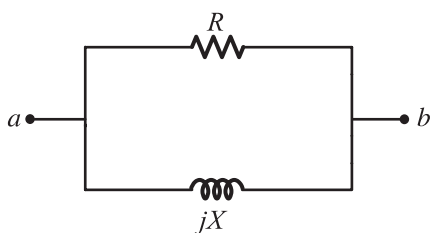


圖 9-5e

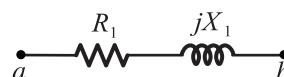


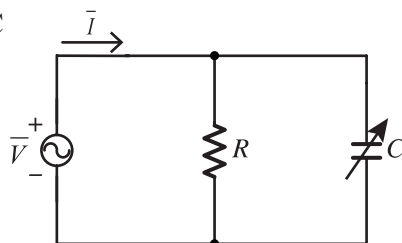
圖 9-5f

9-6 課後習題

選擇題

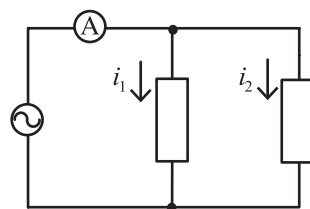
1. 如右圖所示之交流電路，若將電路中之電容器 C 值調小，則下列敘述何者錯誤？台北捷運 112

(A) 電容器容抗 X_C 值變大
 (B) $\bar{I}$ 值變小
 (C) $\bar{I}$ 與 $\bar{V}$ 間之相位角 θ 變大
 (D) $\bar{I}$ 超前 $\bar{V}$



2. 如右圖所示，交流電路 $i_1 = 6\sqrt{2} \sin 377t$ 安培， $i_2 = 8\sqrt{2} \sin(377t + 90^\circ)$ 安培，則交流電表 A 之讀值為何？身心障礙特考 112

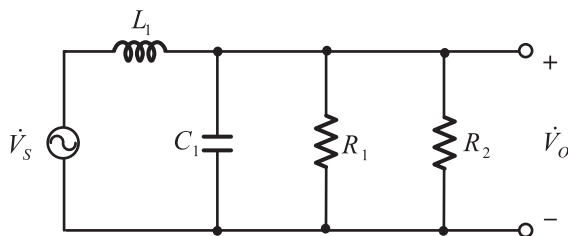
(A) 10 安培
 (B) $10\sqrt{2}$ 安培
 (C) 14 安培
 (D) $14\sqrt{2}$ 安培



3. 有一 RL 串聯電路，當輸入為直流 48 伏 (V) 時，量得輸入電流為 16 安培 (A)；當輸入為交流 100 伏 (V) 時，量得輸入電流為 10 安培 (A)，求電感抗 (X_L) 約為多少歐姆 (Ω)？初等考 112

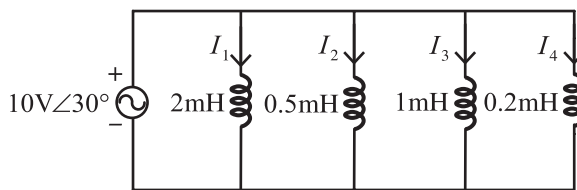
(A) 0.2 (B) 9.5 (C) 13.3 (D) 16.6

4. 如下圖所示之電路，其中電源之電壓相量為 $V_s = 20 \angle 0^\circ$ ，其電壓為 $V_s = 20 \sin 3t$ (V)， $L_1 = 2\text{H}$ ， $C_1 = 0.1\text{F}$ ， $R_1 = R_2 = 4\Omega$ ，求電壓 $\dot{V}_o$ 為多少伏特 (V)？普考 112



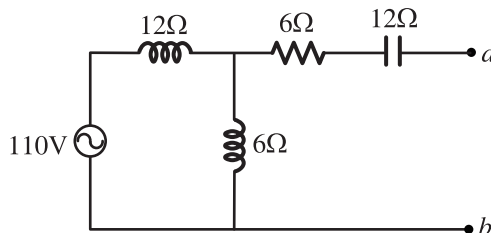
5. 如右圖所示之電路，若交流電源頻率為 300Hz，且流經各電感之電流為 $I_i = |I_i| \angle \theta_i$ ，則 $|I_1| : |I_2| : |I_3| : |I_4|$ 為何？鐵路特考 112

- (A) 20:5:10:2
(B) 20:10:5:2
(C) 1:2:4:10
(D) 1:4:2:10



6. 如下圖所示，其戴維寧等效電路阻抗 Z_{ab} 為何？

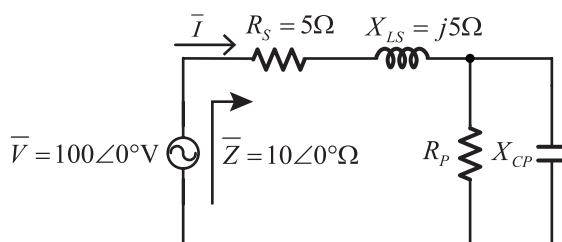
自來水 111



台電 111

7. 如右圖所示，試求：

- (1) 並聯電阻值 R_p ?
(2) 並聯電容抗值 X_{CP} ?
(3) 總電流 $\bar{I}$?
(註：請以 $A \angle B$ 表示)



8. 在交流電路中，電阻為 60Ω 、電感抗為 $j120\Omega$ 、電容抗為 $-j40\Omega$ 串聯，串聯後的總阻抗絕對值為何？

台糖 111

- (A) 170.9Ω (B) 116.6Ω (C) 100Ω (D) 50Ω

9. 交流電路中，電阻為 30Ω 與電感抗為 $j40\Omega$ 並聯，並聯後阻抗的絕對值為何？

台糖 111

- (A) 70Ω (B) 50Ω (C) 36Ω (D) 24Ω

10. 如下圖所示交流電路，圖 (a) 為交流 RC 並聯電路，圖 (b) 為其等效串聯電路， R 及 X_C 各為多少歐姆？

台糖 111

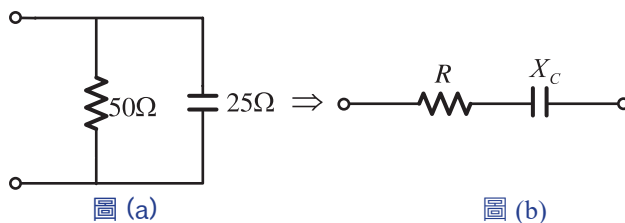


圖 (a)

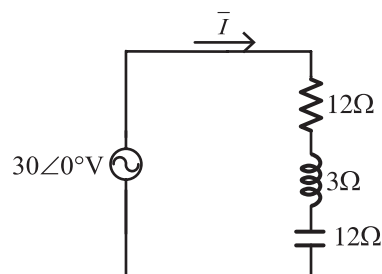
圖 (b)

- (A) $R=50\Omega$ 、 $X_C=25\Omega$ (B) $R=25\Omega$ 、 $X_C=50\Omega$
(C) $R=20\Omega$ 、 $X_C=10\Omega$ (D) $R=10\Omega$ 、 $X_C=20\Omega$

11. 如右圖所示電路，下列選項何者正確？（複選題）

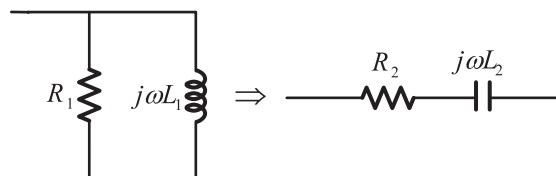
台糖 111

- (A) $\bar{I} = 2\angle 37^\circ \text{ A}$
 (B) $\bar{Z} = 15\angle -37^\circ \Omega$
 (C) $\bar{V}_L = 6\angle 37^\circ \text{ V}$
 (D) $\bar{V}_C = 24\angle 127^\circ \text{ V}$



12. 如下圖所示，當 R-L 並聯電路轉換 R-L 串聯電路，圖中 $R_1 = 2\Omega$ ， $\omega L_1 = 4\Omega$ ，則 R_2 應為多少 Ω ？

地特五等 111

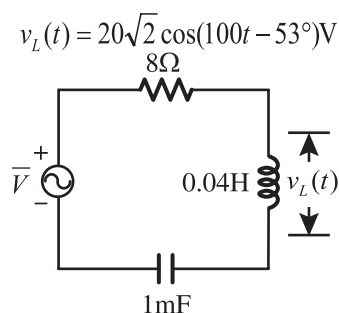


- (A) 0.8 (B) 1.6 (C) 2 (D) 4
13. 某電路測量得知電源電壓 $v(t) = 100\cos(377t - 30^\circ) \text{ V}$ ，電路電流 $i(t) = 10\sin(377t + 60^\circ) \text{ A}$ ，請問該電路屬於何種特性？
- 自來水 111
- (A) RC 串聯電路 (B) 純電感電路 (C) 純電容電路 (D) 純電阻電路
14. 有一線圈電感量為 20mH ，接於 $v(t) = 10\sin(100t - 10^\circ) \text{ V}$ 之電源，則此線圈之電感抗 X_L 約為多少？
- 自來水 111
- (A) 1Ω (B) 2Ω (C) 3Ω (D) 4Ω
15. 50Hz 、 10V 之交流電源連接至一理想電感器，若測得流過電感器電流為 0.5A ，則此電感器之電感量為多少？
- 自來水 111
- (A) 45.5mH (B) 50.0mH (C) 62.5mH (D) 63.7mH

16. 如右圖所示之 RLC 串聯電路，若已知 $v_L(t) = 20\sqrt{2}\cos(100t - 53^\circ) \text{ V}$ ，請問下列何者正確？

自來水 111

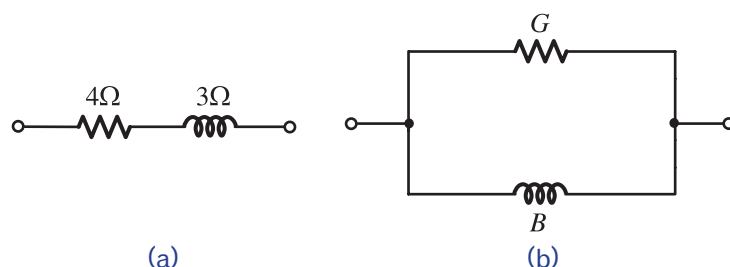
- (A) $\bar{V} = 50\angle -90^\circ \text{ V}$
 (B) $\bar{V} = 50\angle 90^\circ \text{ V}$
 (C) $\bar{Z} = 10\angle -37^\circ \Omega$
 (D) $\bar{Z} = \angle -53^\circ \Omega$



17. 有一電感器之電感值為 0.2H ，若流過的電流 $i_L(t) = 2\sqrt{2} \cos(100t - 30^\circ)\text{A}$ ，則其端電壓 $v_L(t)$ 為下列何者？ 初等考111

(A) $v_L(t) = 4\sqrt{2} \sin(100t - 60^\circ)\text{V}$ (B) $v_L(t) = 40\sqrt{2} \sin(100t - 60^\circ)\text{V}$
 (C) $v_L(t) = 4\sqrt{2} \sin(100t + 150^\circ)\text{V}$ (D) $v_L(t) = 40\sqrt{2} \sin(100t + 150^\circ)\text{V}$

18. 若將下圖 (a) 之串聯電路轉成等效之並聯電路圖 (b)，則 G 與 B 分別為多少歐姆？ 鐵路特考 111



(A) $G=0.16, B=0.12$ (B) $G=1.6, B=1.2$
 (C) $G=0.16, B=-0.12$ (D) $G=1.6, B=-1.2$

素養觀念題

- 圖 (1) 是純電容交流電路波形，黃色 CH1 是 $v_C(t)$ 波形 (Volts/Div=2V)，藍色 CH2 是 $i(t)$ 波形 (Volts/Div=10mV)，Time/Div=200μs，請問 $i(t)$ 是超前還是落後？_____，相位差是幾度？_____， $i(t)$ 的有效值是多少？_____，依照實驗結果，繪出 $\bar{v}_C$ 、 $\bar{i}$ 相量圖_____。
- 圖 (2) 是純電感交流電路波形，黃色 CH1 是 $v_L(t)$ 波形 (Volts/Div=2V)，藍色 CH2 是 $i(t)$ 波形 (Volts/Div=5mV)，Time/Div=200μs，請問 $i(t)$ 是超前還是落後？_____，相位差是幾度？_____， $i(t)$ 的有效值是多少？_____，依照實驗結果，繪出 $\bar{v}_L$ 、 $\bar{i}$ 相量圖_____。

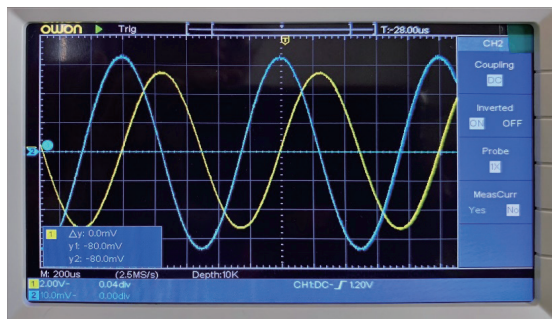


圖 (1)

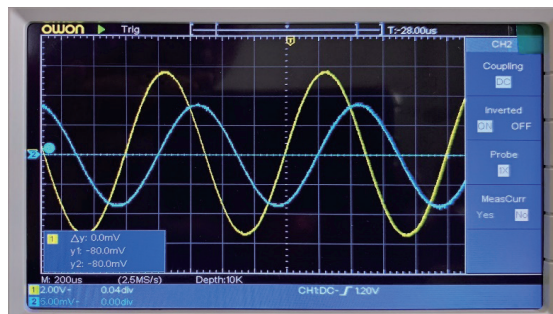


圖 (2)

3. 圖 (3) 是 RC 串聯交流電路波形，黃色 CH1 是 $v_s(t)$ 波形 (Volts/Div=2V)，藍色 CH2 是 $v_c(t)$ 波形 (Volts/Div=2mV)，Time/Div=200 μ s，請問電源 f =_____， $v_c(t)$ 是超前還是落後？_____，相位差是幾度？_____， $v_c(t)$ 的有效值是多少？_____，依照實驗結果，繪出 $\bar{V}_s$ 、 $\bar{V}_c$ 相量圖_____。
4. 圖 (4) 是 RL 串聯交流電路波形，黃色 CH1 是 $v_s(t)$ 波形 (Volts/Div=2V)，藍色 CH2 是 $v_L(t)$ 波形 (Volts/Div=2V)，Time/Div=20 μ s，請問 $v_L(t)$ 是超前還是落後？_____，相位差是幾度？_____， $v_L(t)$ 的有效值是多少？_____，依照實驗結果，繪出 $\bar{V}_s$ 、 $\bar{V}_L$ 相量圖_____。

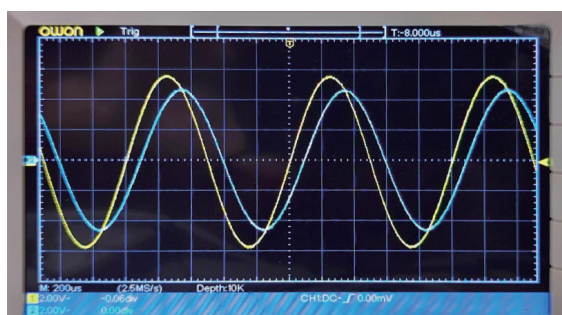


圖 (3)

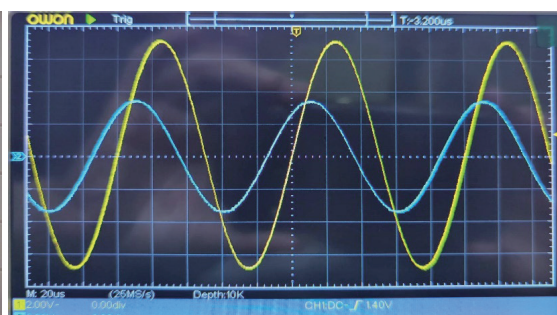
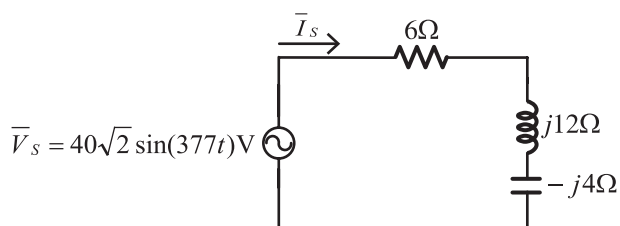


圖 (4)

5. 一交流電路輸入電壓為 $v(t) = 156 \cos(377t)$ V，輸入電流為 $i(t) = 10 \sin(377t + 45^\circ)$ A，請問電流相角落後電壓相角_____度。 台電 112
6. 如下圖所示，電流 $\bar{I}_s$ 為_____安培(A)。(請以瞬間值數學表示式表示： $\cos 30^\circ = 0.866$ ， $\cos 36.9^\circ = 0.6$) 台電 111



MEMO



交流電功率

學習目標

- 10-1 瞬間功率
- 10-2 平均功率
- 10-3 視在功率
- 10-4 虛功率
- 10-5 功率因數
- 10-6 本章內容摘要
- 10-7 課後習題

學習綱要

1. 能瞭解與計算交流電路的瞬間功率值
2. 能瞭解與計算交流電路的平均功率
3. 能瞭解與計算交流電路的視在功率
4. 能瞭解與計算交流電路的虛功率
5. 能瞭解與計算交流電路的功率因數

前面直流電的功率，問題比較單純，僅定義功率為該元件的電壓與電流的乘積。交流電因為電壓與電流都隨時間在變化，所以關於功率問題，則分為瞬間功率、平均功率、視在功率、虛功率、功率因數等 5 個單元。

§10-1 瞬間功率

交流電路的方塊圖，如圖 10-1a 所示，其電源電壓的瞬間值，以正弦式表示如下：

$$v(t) = V_m \sin(\omega t + \theta_v) = \sqrt{2}V \sin(\omega t + \theta_v) \text{ (伏特, V)}$$

電路電流的瞬間值以正弦式表示如下：

$$i(t) = I_m \sin(\omega t + \theta_i) = \sqrt{2}I \sin(\omega t + \theta_i) \text{ (安培, A)}$$

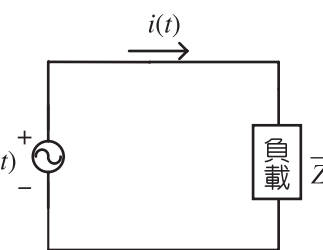


圖 10-1a 交流電路

瞬間電壓 $v(t)$ 與瞬間電流 $i(t)$ 的相乘積，即稱為瞬間功率 (instantaneous power, $p(t)$)，數學方程式為：

$$\begin{aligned} p(t) &= v(t)i(t) = V_m \sin(\omega t + \theta_v) \times I_m \sin(\omega t + \theta_i) \text{ (瓦特, W)} \\ &= \sqrt{2}V \sin(\omega t + \theta_v) \times \sqrt{2}I \sin(\omega t + \theta_i) \\ &= 2VI \sin(\omega t + \theta_v) \sin(\omega t + \theta_i) \\ &= VI \times 2 \sin(\omega t + \theta_v) \sin(\omega t + \theta_i) \end{aligned}$$

應用三角函數之積化和差公式，即 $2 \sin \alpha \sin \beta = \cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)$ ，令 $\alpha = \omega t + \theta_v$ 、 $\beta = \omega t + \theta_i$ ，代入，則：

$$\begin{aligned} p(t) &= VI \{ \cos[(\omega t + \theta_v) - (\omega t + \theta_i)] - \cos[(\omega t + \theta_v) + (\omega t + \theta_i)] \} \text{ (瓦特, W)} \\ &= VI [\cos(\theta_v - \theta_i) - \cos(2\omega t + \theta_v + \theta_i)] \end{aligned}$$

令 $\theta = \theta_v - \theta_i$ ，且定義 θ 為功率因數角，

$$p(t) = VI \cos \theta - VI \cos(2\omega t + \theta_v + \theta_i) \text{ (瓦特, W)}$$

(公式10-1a)

以上公式 10-1a 即為交流電路的瞬間功率值。

由以上方程式，我們得到以下結論：

1. $p(t)$ 的頻率 (f_p) 為電源頻率 (f) 的兩倍 ($f_p = 2f$)。 (公式 10-1b)
2. 因為 $-1 \leq \cos(2\omega t + \theta_v + \theta_i) \leq 1$ ，故由公式 10-1a 得知，當 $\cos(2\omega t + \theta_v + \theta_i) = -1$ 時，可得最大瞬間功率 ($P_{\max}$) 為：

$$P_{\max} = VI \cos \theta - VI(-1) = VI(\cos \theta + 1) \text{ (瓦特, W)}$$

(公式 10-1c)

當 $\cos(2\omega t + \theta_v + \theta_i) = 1$ 時，可得最小瞬間功率 ($P_{\min}$) 為：

$$P_{\min} = VI \cos \theta - VI(1) = VI(\cos \theta - 1) \text{ (瓦特, W)}$$

(公式 10-1d)

範例 10-1a

如圖(1)所示之交流電路，當接於 $v(t) = 8\sqrt{2} \sin(314t)$ V 電源電壓時，若產生電流 $i(t) = 5\sqrt{2} \sin(314t - 37^\circ)$ A，試求該電路之：

- (1) $p(t)$ 方程式 (2) $P_{\max}$
- (3) $P_{\min}$ (4) f_p 。

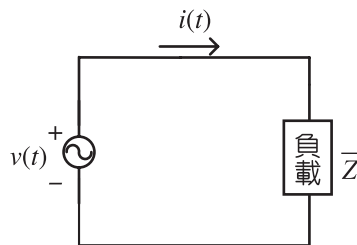


圖 (1)

解

- (1) $V_m = 8\sqrt{2} \Rightarrow V = 8\text{V}$ ， $I_m = 5\sqrt{2} \Rightarrow I = 5\text{A}$ ， $\omega = 314 \text{ rad/s}$ ， $\theta = \theta_v - \theta_i = 0^\circ - (-37^\circ) = 37^\circ$ (公式要背起來，考試沒時間讓您推導)

$$\begin{aligned} p(t) &= VI \cos \theta - VI \cos(2\omega t + \theta_v + \theta_i) \\ &= 8 \times 5 \times \cos 37^\circ - 8 \times 5 \times \cos(2 \times 314t + 0^\circ - 37^\circ) \\ &= 32 - 40 \cos(628t - 37^\circ) \text{ W} \quad (\cos 37^\circ = \frac{4}{5}) \end{aligned}$$

- (2) $P_{\max} = VI(\cos \theta + 1) = 8 \times 5 \times (\cos 37^\circ + 1) = 72 \text{ W}$

- (3) $P_{\min} = VI(\cos \theta - 1) = 8 \times 5 \times (\cos 37^\circ - 1) = -8 \text{ W}$

- (4) 電源 $f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{314}{2 \times 3.14} = 50 \text{ Hz}$ ，則 $f_p = 2f = 2 \times 50 = 100 \text{ Hz}$ 。

自我練習

1. 某單相交流電路，若瞬間功率方程式 $p(t) = 800 - 1000 \cos(314t + 60^\circ)$ W。

- (1) 當 $t = \frac{1}{100}$ 秒時之瞬間電功率 $p(t) = \underline{\hspace{2cm}}$ W。

- (2) 最大瞬間功率 $P_{\max} =$ _____
 (3) 最小瞬間功率 $P_{\min} =$ _____
 (4) 電功率頻率 = _____
2. 有一 RLC 串聯電路，接於 $v(t) = 100\sqrt{2} \sin(377t)$ V 之交流電源，已知電阻 $R = 6\Omega$ 、電感抗 $X_L = 20\Omega$ 、電容抗 $X_C = 12\Omega$ ，則此串聯電路最大瞬間功率為多少瓦特？統測 112
 (A) 1200 (B) 1460 (C) 1600 (D) 1850
3. 續上題，(1) 請寫出 $p(t)$ 方程式。(2) $P_{\max} = ?$ (3) $P_{\min} = ?$ (4) 瞬間功率的 $f = ?$
4. 有一 RC 串聯電路，已知其電阻 $R = 24\Omega$ 以及電容抗 $X_C = 18\Omega$ 。若將此電路接於 $v(t) = 120\cos(377t + 30^\circ)$ V 之電源，則電源所供應之最大瞬間功率為何？統測 110
 (A) 480W (B) 432W (C) 384W (D) 192W

範例 10-1b

電路同範例 10-1a，請寫程式繪出 $v(t)$ 、 $i(t)$ 、 $p(t)$ 圖。

輸出結果

輸出如圖 (1)，藍色是 $v(t)$ 、橘紅色是 $i(t)$ 、綠色是 $p(t)$ ，程式如下：

```
import matplotlib.pyplot as plt #載入繪圖模組
import numpy as np #載入numph 模組
pi=np.pi
V=8;I=5;w=314
siv=0;sii=-37
si=siv-sii
siv=siv/180*pi
sii=sii/180*pi
si=(si)/180*pi
T=2*pi/w;dt=T/1000
t = np.arange(-0.4*T, 1.1*T,dt) #
Vm=V*1.4;Im=I*1.4;
Pm=V*I*np.cos(si)-V*I*np.
cos(2*w*t+siv+sii)
y1=Vm*np.sin(siv+w*t)#v(t)
```

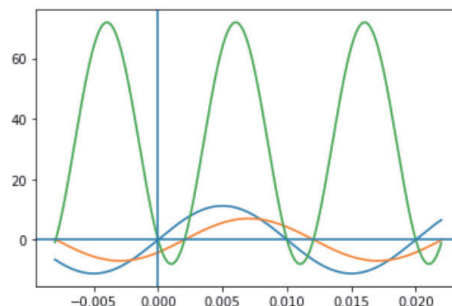


圖 (1) 藍色是 $v(t)$ ，單位符號是 V、橘紅色是 $i(t)$ ，單位符號是 A、綠色是 $p(t)$ ，單位符號是 W

```
y2=Im*np.sin(sii+w*t)#i(t)
y3=Pm#p(t)
plt.plot(t,y1) #繪出v(t)函數圖形,藍色
plt.plot(t,y2) #繪出i(t)函數圖形,橘色
plt.plot(t,y3) #繪出p(t)函數圖形,綠色
plt.axhline(y=0)#繪出x軸
plt.axvline(x=0)#繪出y軸
plt.show() #於視窗輸出圖形
```

自我練習

1. 同範例 10-1b，請自行練習繪出純電感電路的瞬間功率。
2. 同範例 10-1b，請自行練習繪出純電容電路的瞬間功率。
3. 電路同範例 10-1a，自我練習 2，請繪出電路的瞬間功率。

10-2 平均功率

平均功率 (average power, P)，是指一個完整週期內之全部瞬間功率 $p(t)$ 相加後的平均值。

由公式 (10-1) 知， $p(t)$ 可分成 $VI \cos\theta$ 及 $VI \cos(2\omega t + \theta_v + \theta_i)$ 兩項，因 $VI \cos(2\omega t + \theta_v + \theta_i)$ 是角頻率為 2ω 之週期性餘弦波形，其平均值為「零」，故 $p(t)$ 的平均功率為：

$$P = VI \cos\theta \quad (\text{瓦特, W})$$

(公式10-2a)

$\theta = \theta_v - \theta_i$ ，其值在 $-90^\circ \sim 90^\circ$ 之間，此區間的 $\cos\theta$ 都是正值，所以平均功率 P 為正值，而正功率係代表著負載每秒鐘所消耗的電能，故「平均功率」亦稱為「有效功率 (effective power)」或「實功率 (real power)」。

範例10-2a

某單相交流電路，若電源電壓與電路電流分別為 $v(t) = 30\sqrt{2} \sin(377t + 60^\circ)\text{V}$ ， $i(t) = 3\sqrt{2} \sin(377t)\text{A}$ ，則此電路之平均功率 P 為何？

解

$$V_m = 30\sqrt{2} \Rightarrow V = 30\text{ V}, \quad I_m = 3\sqrt{2} \Rightarrow I = 3\text{ A}$$

$$\theta = \theta_v - \theta_i = 60^\circ - 0^\circ = 60^\circ$$

$$P = VI \cos\theta = 30 \times 3 \times \cos 60^\circ = 30 \times 3 \times \frac{1}{2} = 45\text{ W} \quad (\cos 60^\circ = \frac{1}{2})$$

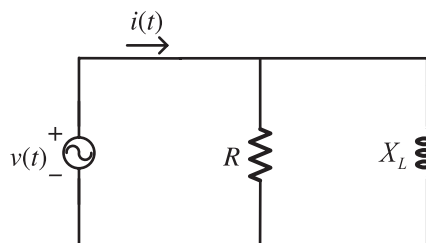
自我練習

1. 某單相交流電路，若 $v(t) = 30\sqrt{2} \sin(377t + 60^\circ)\text{V}$ ， $i(t) = 3\sqrt{2} \cos(377t - 60^\circ)\text{A}$ ，則此電路的平均功率 P 為何？

範例10-2b

如右圖所示，電路中 $R=4\Omega$ 、 $X_L=3\Omega$ ，並聯接於電源 $v(t)=12\sqrt{2}\sin(157t+45^\circ)\text{V}$ 。試計算：

- (1) 瞬間功率方程式 $p(t)$
- (2) 瞬間最大功率 $P_{\max}$
- (3) 瞬間最小功率 $P_{\min}$
- (4) 平均功率 P_{av}
- (5) 瞬間功率頻率 f_p 。

**解**

$$v(t)=12\sqrt{2}\sin(157t+45^\circ)\text{V}\Rightarrow\bar{V}=12\angle 45^\circ\text{V}$$

$$\bar{Z}=R//jX_L=\frac{R\times jX_L}{R+jX_L}=\frac{4\times j3}{4+j3}=\frac{12\angle 90^\circ}{5\angle 37^\circ}=\frac{12}{5}\angle 53^\circ\Omega$$

$$\bar{I}=\frac{\bar{V}}{\bar{Z}}=\frac{12\angle 45^\circ}{\frac{12}{5}\angle 53^\circ}=5\angle -8^\circ\text{A}$$

$$\theta_v=45^\circ, \theta_i=-8^\circ\Rightarrow\theta=\theta_v-\theta_i=45^\circ-(-8^\circ)=53^\circ$$

$$\begin{aligned}(1) p(t) &= VI\cos\theta - VI\cos(2\omega t + \theta_v + \theta_i) \\ &= 12\times 5\times \cos 53^\circ - 12\times 5\cos(2\times 157t + 45^\circ - 8^\circ) \\ &= 36 - 60\cos(314t + 37^\circ)\text{ W} \quad (\cos 53^\circ = 0.6)\end{aligned}$$

$$(2) P_{\max}=VI(\cos\theta+1)=12\times 5\times (\cos 53^\circ+1)=96\text{W}$$

$$(3) P_{\min}=VI(\cos\theta-1)=12\times 5(\cos 53^\circ-1)=-24\text{W}$$

$$(4) P_{av}=VI\cos\theta=12\times 5\times \cos 53^\circ=12\times 5\times 0.6=36\text{W}$$

$$(5) \omega=2\pi f=157 \quad f\div 25 \quad f_p=2f\div 50\text{Hz}$$

自我練習

1. 交流 RC 並聯電路， $R=6\Omega$ 、 $X_C=8\Omega$ ，電路電流 $i(t)=10\sqrt{2}\sin(80t+60^\circ)\text{A}$ ，試計算：

- (1) 瞬間功率方程式 $p(t)$
- (2) 瞬間最大功率 $P_{\max}$
- (3) 瞬間最小功率 $P_{\min}$
- (4) 平均功率 P_{av} 。

10-3 視在功率

交流電路中，不考慮電源電壓與電路電流相位差情況下，直接將電源電壓有效值 V 與電路電流有效值 I 之乘積即為視在功率 (apparent power)，符號以大寫 S 表示之，其單位為伏安 (VA)。故視在功率數學表示式為：

$$S=VI \text{ (伏安, VA)}$$

(公式10-3a)

依據歐姆定律 $V=IZ$ 或 $I=VY$ ，因此，視在功率之計算亦可寫成：

$$S = I^2 Z = \frac{V^2}{Z} = V^2 Y \text{ (伏安, VA)}$$

(公式10-3b)

上式中 Z 與 Y 分別為電路總阻抗與總導納。

視在功率表示供電端的供電能力，若負載端為電阻性（相位差 $\theta=0^\circ$ ），則供電端輸出視在功率等於實功率（ $P=S\times\cos 0^\circ=S$ ）。若負載端為電抗設備，則會導致電流與電壓間產生相位差（ $\theta=\theta_v-\theta_i$ ），而實際得到的功率（ $P=S\times\cos\theta$ ）也會有所折扣。舉例說明，假設用電端的輸電線線徑是以電阻性負載來設計，而實際上使用為電感性負載（如：馬達），雖然實際消耗的功率（ P ）沒有增加，但因為虛功率的增加，電力公司則必須提供更多的功率，相對的，線路上的電流也會跟著提高，此時，就要提高線徑，不然容易產生高熱甚至引起火災。

範例10-3a

某負載電壓為 $110\sqrt{2}\sin(314t+60^\circ)\text{V}$ ，電流為 $5\sqrt{2}\sin(314t+30^\circ)\text{A}$ ，則該負載的視在功率約為多少VA？

統測104

(A) 1100 (B) 952.63 (C) 777.82 (D) 550

解

(1) 由 $v(t)=110\sqrt{2}\sin(314t+60^\circ)\text{V}$ 得到 $\bar{V}=110\angle 60^\circ\text{V}\Rightarrow V=110\text{V}$ 。

(2) 由 $i(t)=5\sqrt{2}\sin(314t+30^\circ)\text{A}$ 得到 $\bar{I}=5\angle 30^\circ\text{A}\Rightarrow I=5\text{A}$ 。

(3) 由 $S=VI=110\times 5=550\text{VA}$ 。

自我練習

1. 有一交流電路，已知電源電壓 $\bar{V} = 100\angle -30^\circ \text{ V}$ ，電路電流 $\bar{I} = 10\angle 0^\circ \text{ A}$ ，試求該電路之視在功率 S 為多少？

範例10-3b

有一 RC 串聯交流電路，已知 $R = 3\Omega$ ， $X_C = 4\Omega$ ，電源電壓 $v_t(t) = 12\sqrt{2}\sin(1000t)\text{V}$ ，試求該電路視在功率為多少？

解

(1) 電路總阻抗 $Z = \sqrt{R^2 + X_C^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5\Omega$ 。

(2) 視在功率 $S = \frac{V^2}{Z} = \frac{12^2}{5} = 28.8\text{VA}$ 。

自我練習

1. 同範例 10-2b 之條件，求視在功率為多少？
2. 有 RL 串聯交流電路，已知 $R = 3\Omega$ 、 $X_L = 4\Omega$ ，電路電流 $\bar{I} = 12\angle 0^\circ \text{ A}$ ，試求該電路視在功率為多少？
3. 有 RL 並聯交流電路，已知 $R = 3\Omega$ 、 $X_L = 4\Omega$ ，電源電壓 $\bar{V} = 12\angle 0^\circ$ ，試求該電路視在功率為多少？

10-4 虛功率

於範例 10-2b 的功率瞬間值，若是純電感的電流落後 90° ，則圖形如圖 10-4a；若是純電容的電流超前 90° ，則圖形如圖 10-4b。

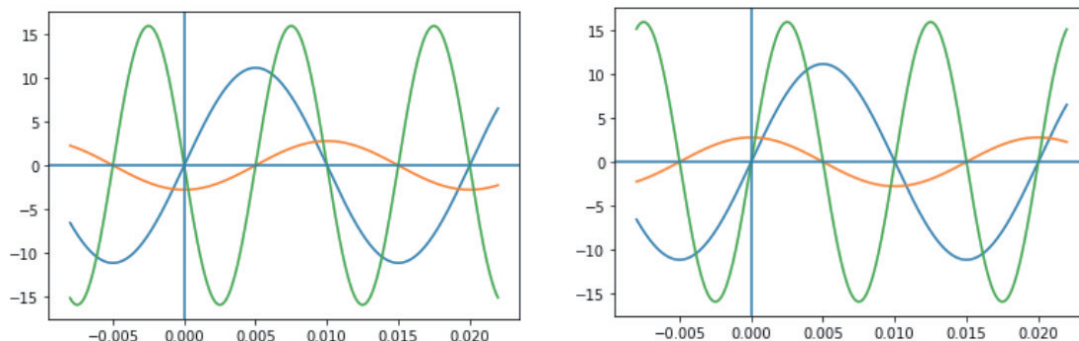


圖 10-4a 藍色是 $v(t)$ 、紅色是 $i(t)$ 、綠色是 $p(t)$ 圖 10-4b 藍色是 $v(t)$ 、紅色是 $i(t)$ 、綠色是 $p(t)$

以上兩種情況，因為 $p(t)$ 上下波形的面積互相抵銷，其平均功率都為 0，雖然平均功率為 0，但是電感器及電容器的瞬間功率值並非為零，而是在瞬間功率的正半週時將電源傳送的能量儲存起來，在瞬間功率的負半週將儲存的能量釋放回電源，造成沒有能量的耗損，因此對於電感器或電容器將電源能量在一週內進行轉移，而沒有任何能量的消耗，稱為虛功率 (imaginary power)、無效功率 (ineffective power) 或電抗功率 (reactive power)，符號為 Q ，單位為乏爾 (VAR)，其數學式為：

$$Q = VI \sin \theta \quad (\text{乏爾, VAR})$$

(公式 10-4a)

其中 θ 為電壓 $\bar{V}$ 與電流 $\bar{I}$ 之夾角 $\theta = \theta_v - \theta_i$ 。

純電阻虛功率

純電阻電壓與電流相位相同，功率因數角 $\theta = \theta_v - \theta_i = 0^\circ$ ，

$$Q = VI \sin \theta = VI \sin 0^\circ = 0$$

所以純電阻電路的虛功率為 0。(備註：純電阻消耗的功率稱為實功率 P)

純電感虛功率

純電感電壓超前電流 90° ，所以相位夾角 $\theta = \theta_v - \theta_i = 90^\circ - 0^\circ = 90^\circ$ ，電感器的虛功率 $\bar{Q}_L$ 位於相量圖的 $+j$ 軸，其相量式為

$$\bar{Q}_L = +jQ_L = Q_L \angle +90^\circ \quad (\text{乏爾, VAR}) \quad (\text{公式10-4b})$$

電路中有電感器時， Q_L 大小可計算如下：

$$Q_L = \frac{V_L^2}{X_L} = I_L^2 X_L$$

純電容虛功率

因電容器電壓落後電流，所以相位夾角 $\theta = \theta_v - \theta_i = -90^\circ - 0^\circ = -90^\circ$ ，電容器的虛功率 $\bar{Q}_C$ ，位於相量圖的 $-j$ 軸，其相量式為

$$\bar{Q}_C = -jQ_C = Q_C \angle -90^\circ \quad (\text{乏爾, VAR}) \quad (\text{公式10-4c})$$

電路中有電容器時， Q_C 大小可計算如下：

$$Q_C = \frac{V_C^2}{X_C} = I_C^2 X_C$$

RLC 電路虛功率

交流電路為 RLC 串聯或 RLC 並聯時，虛功率為電感器與電容器的相量相加，相量式為：

$$\bar{Q}_T = \bar{Q}_L + \bar{Q}_C = +jQ_L - jQ_C = j(Q_L - Q_C) \quad (\text{乏爾, VAR}) \quad (\text{公式10-4d})$$

視在功率 S 、平均功率 P 、虛功率 Q 的大小，可以使用直角三角形，如圖 10-4c，表現其關係如下：

$$S = VI = \sqrt{P^2 + Q^2} \quad (\text{伏安, VA})$$

$$P = VI \cos \theta \quad (\text{瓦特, W})$$

$$Q = VI \sin \theta \quad (\text{乏爾, VAR})$$

以上稱為功率三角形 (power triangle)。

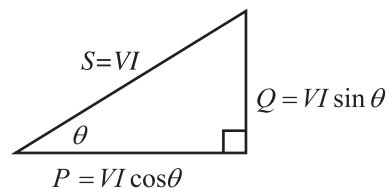
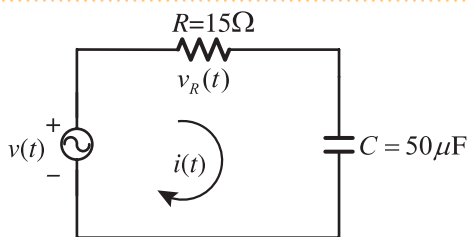


圖 10-4c 功率三角形

範例10-4a

如右圖所示， $v(t) = 100\sqrt{2} \sin(1000t + 30^\circ)$ V，試計算虛功率 Q 。



解

$$v(t) = 100\sqrt{2} \sin(1000t + 30^\circ) \text{ V}$$

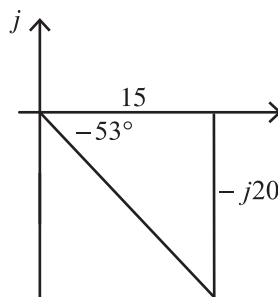
$$\Rightarrow \bar{V} = 100\angle 30^\circ \text{ V}$$

$$\because \omega = 1000 \Rightarrow X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{1000 \times 50\mu} = 20\Omega$$

$$\bar{Z} = R - jX_C = 15 - j20 = 25\angle -53^\circ \Omega$$

$$\bar{I} = \frac{\bar{V}}{\bar{Z}} = \frac{100\angle 30^\circ}{25\angle -53^\circ} = 4\angle 83^\circ \text{ A}$$

$$\therefore Q = Q_C = I^2 \times X_C = 4^2 \times 20 = 320 \text{ VAR}$$



自我練習

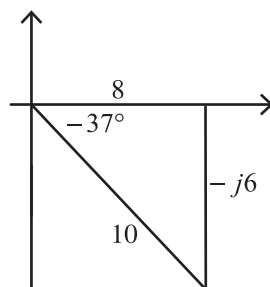
1. 交流 RL 並聯電路， $R = 16\Omega$ 、 $L = 30\text{mH}$ 、電路電流 $i(t) = 10\sqrt{2} \sin(400t - 60^\circ)$ A，試計算虛功率 Q 。
2. 有一交流電源 $v(t) = 100\sqrt{2} \sin(377t - 10^\circ)$ V 供應某負載，若負載電流 $i(t) = 10\sqrt{2} \sin(377t + 50^\circ)$ A，則此負載的平均功率 P 及虛功率 Q 分別為何？

統測108

- (A) $P = 1000\text{W}$ ， $Q = 500\text{VAR}$ (電感性)
 (B) $P = 1000\text{W}$ ， $Q = 866\text{VAR}$ (電感性)
 (C) $P = 500\text{W}$ ， $Q = 500\text{VAR}$ (電容性)
 (D) $P = 500\text{W}$ ， $Q = 866\text{VAR}$ (電容性)

範例10-4b

有一 RLC 串聯交流電路，其電壓 $\bar{V} = 10\angle 0^\circ \text{ V}$ ， $R = 8\Omega$ ， $X_L = 6\Omega$ ， $X_C = 12\Omega$ ，試求電路的平均功率 P 與虛功率 Q 為多少？

**解**

$$\bar{Z} = R + j(X_L - X_C) = 8 + j(6 - 12) = 8 - j6 = 10\angle -37^\circ \Omega$$

$$\bar{I} = \frac{\bar{V}}{\bar{Z}} = \frac{10\angle 0^\circ}{10\angle -37^\circ} = 1\angle 37^\circ \text{ A}$$

$$\text{功率因數角：}\theta = \theta_v - \theta_i = 0^\circ - 37^\circ = -37^\circ$$

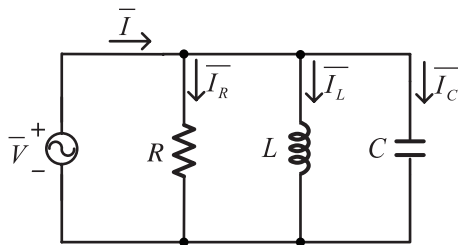
$$P = VI \cos \theta = 10 \times 1 \times \cos(-37^\circ) = 8 \text{ W}$$

$$Q = VI \sin \theta = 10 \times 1 \times \sin(-37^\circ) = -6 \text{ VAR (負值表示為電容性電抗功率)}$$

$$\therefore Q = 6 \text{ VAR (電容性電抗功率)}$$

範例10-4c

如右圖所示之 RLC 串聯電路，
若 $v(t) = 20\sqrt{2} \sin 1000t \text{ V}$ 、 $R = 5\Omega$ 、
 $L = 5 \text{ mH}$ 、 $C = 50 \mu\text{F}$ ，試求：
(1) 平均功率 P (2) 虛功率 Q
(3) 視在功率 S

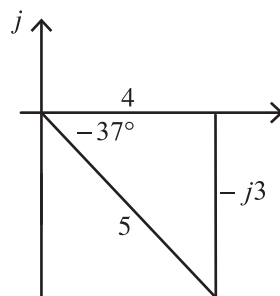
**解**

$$(1) \bar{I}_R = \frac{20\angle 0^\circ}{5} = 4\angle 0^\circ = 4 \text{ A}, \omega = 1000 \text{ rad/sec}$$

$$X_L = \omega L = 1000 \times 5 \text{ m} = 5\Omega \Rightarrow \bar{X}_L = 5\angle 90^\circ \Omega$$

$$\bar{I}_L = \frac{20\angle 0^\circ}{5\angle 90^\circ} = 4\angle -90^\circ \text{ A} = -j4 \text{ A}$$

$$\bar{X}_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{1000 \times 50 \mu} = 20\Omega \Rightarrow \bar{X}_C = 20\angle -90^\circ \Omega$$



$$\bar{I}_C = \frac{20\angle 0^\circ}{20\angle -90^\circ} = 1\angle 90^\circ \text{ A} = j1 \text{ A}$$

$$\bar{I} = \bar{I}_R + \bar{I}_L + \bar{I}_C = 4 - j4 + j = 4 - j3 \text{ A} = 5\angle -37^\circ \text{ A}$$

$$\theta = \theta_v - \theta_i = 37^\circ$$

$$P = VI \cos \theta = 20 \times 5 \times \cos 37^\circ = 100 \times 0.8 = 80 \text{ W}$$

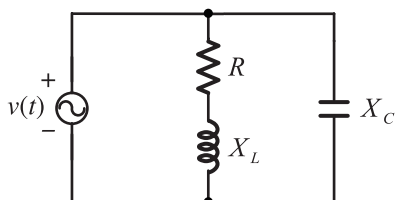
$$(2) Q = VI \sin \theta = 20 \times 5 \times \sin 37^\circ = 100 \times 0.6 = 60 \text{ VAR}$$

$$(3) S = VI = 20 \times 5 = 100 \text{ VA}$$

自我練習

1. 如右圖所示之 RLC 負載電路，若 $v(t) = 100\sqrt{2} \sin(377t) \text{ V}$ ，負載 $R = 6\Omega$ ， $X_L = 8\Omega$ ， $X_C = 5\Omega$ ，則負載的平均功率 P 與虛功率 Q 分別為何？

統測108



- (A) $P = 600 \text{ W}$ ， $Q = 1200 \text{ VAR}$ (電容性)
 (B) $P = 866 \text{ W}$ ， $Q = 1600 \text{ VAR}$ (電容性)
 (C) $P = 600 \text{ W}$ ， $Q = 600 \text{ VAR}$ (電感性)
 (D) $P = 866 \text{ W}$ ， $Q = 866 \text{ VAR}$ (電感性)
2. 單相負載的電壓降 $v_L(t) = 200\sqrt{2} \sin(377t) \text{ V}$ ，負載電流 $i_L(t) = 10 \sin(377t - 30^\circ) \text{ A}$ ，此負載之平均功率 P_L 及虛功率 Q_L 分別為何？
- 統測103
- (A) $P_L = 1000\sqrt{2} \cos 30^\circ \text{ W}$ ， $Q_L = 1000\sqrt{2} \sin 30^\circ \text{ VAR}$
 (B) $P_L = 1000 \cos 60^\circ \text{ W}$ ， $Q_L = 1000 \sin 60^\circ \text{ VAR}$
 (C) $P_L = 1000\sqrt{2} \cos 60^\circ \text{ W}$ ， $Q_L = 1000\sqrt{2} \sin 60^\circ \text{ VAR}$
 (D) $P_L = 2000\sqrt{2} \cos 30^\circ \text{ W}$ ， $Q_L = 2000\sqrt{2} \sin 30^\circ \text{ VAR}$

10-5 功率因數

視在功率 S 是電源所傳送出來的功率，但並非所有的功率都能直接由負載所運用，電抗功率 Q （虛功率）的部分會在負載與電源間轉換，而負載實際能運用或損耗的功率也只有在平均功率 P 的部分，因此我們定義功率因數（Power Factor，簡記為 PF ）為平均功率 P 與視在功率 S 的比值，即：

$$PF = \frac{P}{S} = \frac{VI \cos \theta}{VI} = \cos \theta$$

（公式10-5a）

功率因數為功率的比值，不具單位；其 $\theta = \theta_v - \theta_i$ 為功率因數角，大小介於 $-90^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$ 之間，此區間的 $\cos \theta$ 皆為正，因此功率因數 PF 恆為正值。當功率因數的值為 1 時，表示電路中的電壓與電流相位相同（ $\theta_v - \theta_i = 0$ ）；當功率因數的值為 0 時，表示電路中電壓與電流的相位差 90° （ $\theta_v - \theta_i = \pm 90^\circ$ ）。

當電路有較大的功率因數時，代表負載可由電源獲得比例較多的平均功率，若是電源輸出至負載的平均功率固定，則功率因數愈低時，電源就必須有較大的供電容量（ $S = VI$ ），亦即供給電路的電流也就愈大，而電路必須以加粗導線的方式來增加電流容量，將使得電路製作的成本增加。

一般而言，電路的設計都儘可能使功率因數達到最大值，讓電源輸出的功率都能傳至負載，作實際能量的傳遞，而儘量避免存在電容或電感性負載，使得能量不斷在電源與負載轉換，造成龐大的虛功率。

功率因數的超前與落後

因為相位差 θ 的範圍是 $-90^\circ \sim 90^\circ$ ，此範圍的 $\cos \theta$ 都是正值，無法表現功率因數的超前或落後，所以我們另外定義功率因數的超前或落後如下：

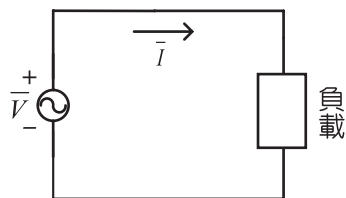
功率因數的超前與落後是以電路電壓 $\bar{v}$ 為基準（即電流的超前或落後）來定義功率因數：

1. 電路為電容性電路時，其電流 $\bar{i}$ 超前電壓 $\bar{v}$ （ $\theta_v < \theta_i$ ），此時功率因數 $PF = \cos \theta$ 稱為超前功率因數。
2. 電路為電感性電路時，其電流 $\bar{i}$ 落後電壓 $\bar{v}$ （ $\theta_v > \theta_i$ ），此時功率因數 $PF = \cos \theta$ 稱為落後功率因數。

範例10-5a

如右圖所示之交流電路，若電壓 $\bar{V}=100\angle 0^\circ \text{ V}$ ，
電流 $\bar{I}=10\angle 30^\circ \text{ A}$ ，則此電路的功率因數為何？

統測 103



- (A) 0.5，超前 (B) 0.5，落後
(C) 0.866，超前 (D) 0.866，落後

解

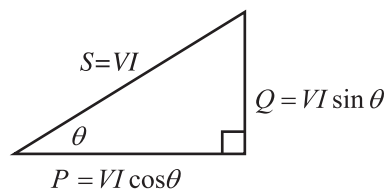
$\theta = \theta_v - \theta_i = 0 - 30^\circ = -30^\circ$ ， $PF = \cos\theta = \cos(-30^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2} \doteq 0.866$
電流超前電壓，所以功因超前。選 (C)

自我練習

- 有一單相交流電路，加入電源電壓 $v(t) = 200\sin(377t)\text{V}$ ，產生電流 $i(t) = 5\cos(377t - 30^\circ)\text{A}$ ，試求該電路的功率因數(PF)為何？ 統測105
(A) 0.5 超前 (B) 0.5 落後 (C) 0.866 超前 (D) 0.866 落後
- 同範例 10-4b，求功率因數 PF 為何？

範例10-5b

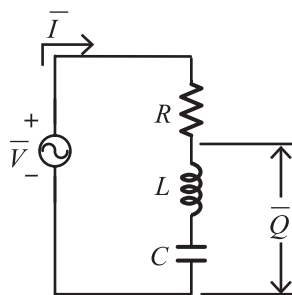
交流電路中，電源提供 20kVA 的視在功率，電
路中有 12kVAR 的虛功率時，試計算功率因數
 PF 。



$$PF = \frac{P}{S} = \frac{\sqrt{S^2 - Q^2}}{S} = \frac{\sqrt{(20\text{k})^2 - (12\text{k})^2}}{20\text{k}} = \frac{16\text{k}}{20\text{k}} = 0.8$$

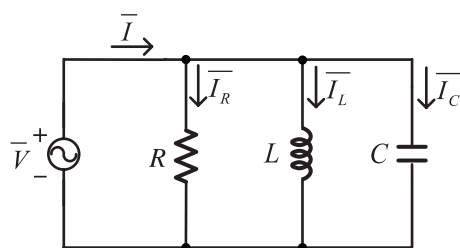
自我練習

- 交流電路中，虛功率為 24kVAR，功率因數 0.6，試計算平均功率。
- 如右圖所示之 RLC 串聯交流電路，設負載元件 $R=3\Omega$ 、 $X_L=8\Omega$ 、 $X_C=4\Omega$ ，當接於 $v(t)=100\sqrt{2}\sin(377t+37^\circ)\text{V}$ 之電源電壓時，試求該電路之 $\bar{V}$ ：
(1) P (2) Q_L (3) Q_C (4) $\bar{Q}$ (5) S (6) PF 。



3. 如右圖所示之 RLC 並聯交流電路，設負載元件 $R=3\Omega$ 、 $X_L=2\Omega$ 、 $X_C=4\Omega$ ，當接於 $\bar{V}=12\angle 0^\circ$ V 電源電壓時，試求電路之：

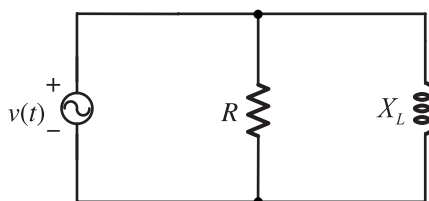
- (1) P (2) Q_L (3) Q_C (4) Q
(5) S (6) PF 。



範例10-5c

如右圖所示之電路，已知電路之功率因數為 0.6， $X_L=6\Omega$ ，則電路之 R 為何？ 統測 108

- (A) 8Ω (B) 12Ω
(C) 15Ω (D) 18Ω



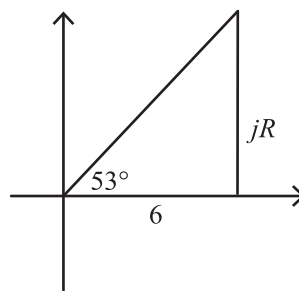
解

- (1) 因為 $\bar{Z} = \frac{\bar{V}}{\bar{I}}$ ，表示 $\bar{Z}$ 的角度是 $\theta_v - \theta_i$ ， $PF = \cos\theta$ ， $\theta = \theta_v - \theta_i$ ，所以 θ 也可以使用 $\bar{Z}$ 的角度。

- (2) 本例 $\bar{Z} = R // \bar{X}_L = \frac{R \times jX_L}{R + jX_L} = \frac{RX_L(j \times (R - jX_L))}{R^2 + X_L^2} = \frac{RX_L}{R^2 + X_L^2}(X_L + jR)$ 。

- (3) 本例僅求 $\bar{Z}$ 的角度，所以 $\bar{Z}$ 僅取 $X_L + jR$ ，由 $X_L + jR$ ，將 $X_L=6$ 代入，得到 $6 + jR$ 如右圖：

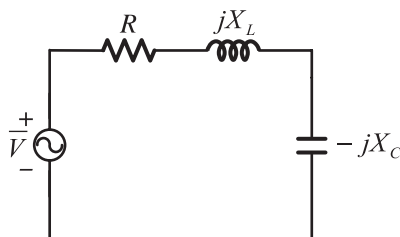
- (4) 題目給 $PF = \cos\theta = 0.6$ ，此為 3:4:5 的直角三角形， $\theta = 53^\circ$ ，鄰邊為 6，表示斜邊為 10，對邊為 8，所以得到 $R=8\Omega$ 。



自我練習

1. 如右圖所示，弦波電壓源 $\bar{V}$ 之有效值為 200V， $R=40\Omega$ 、 $X_L=60\Omega$ 、 $X_C=30\Omega$ 則下列敘述何者正確？ 統測 107

- (A) 電路的功率因數 $PF=0.8$
(B) 電源供給的平均功率 $P=1000W$
(C) 電源供給的虛功率 $Q=1000VAR$
(D) 電源提供的視在功率 $S=1000VA$



10-6 本章內容摘要

1. 交流電路負載的瞬間功率方程式如下：

$$p(t) = VI \cos\theta - VI \cos(2\omega t + \theta_v + \theta_i) \quad (\text{瓦特, W})$$

2. 交流電負載最大瞬間功率：

$$P_{\max} = VI (\cos\theta + 1) \quad (\text{瓦特, W})$$

3. 交流電負載最小瞬間功率：

$$P_{\min} = VI (\cos\theta - 1) \quad (\text{瓦特, W})$$

4. 交流電負載瞬間功率的頻率 (f_p) 為電源頻率 (f) 的兩倍。

$$f_p = 2f \quad (\text{赫茲, Hz})$$

5. 交流電負載的平均功率為：

$$P = VI \cos\theta \quad (\text{瓦特, W})$$

6. 交流電負載的視在功率為：

$$S = VI \quad (\text{伏安, VA})$$

7. 交流電負載的虛功率為：

$$Q = VI \sin\theta \quad (\text{乏爾, VAR})$$

8. 電阻器的虛功率為 0VAR。

9. 電感器的虛功率位於相量圖的 $+j$ 軸，其相量式為：

$$\bar{Q}_L = jQ_L = Q_L \angle 90^\circ \quad (\text{乏爾, VAR}), \quad Q_L = \frac{V_L^2}{X_L} = I_L^2 X_L \quad (\text{乏爾, VAR})$$

10. 電容器的虛功率位於相量圖的 $-j$ 軸，其相量式為：

$$\bar{Q}_C = -jQ_C = Q_C \angle -90^\circ \quad (\text{乏爾, VAR}), \quad Q_C = \frac{V_C^2}{X_C} = I_C^2 X_C \quad (\text{乏爾, VAR})$$

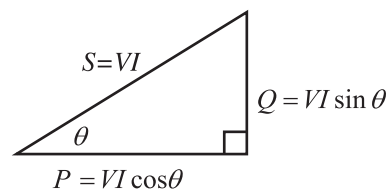
11. 交流電路為 RLC 串聯或 RLC 並聯時，總虛功率為電感器虛功率與電容器虛功率的相量相加，相量式為：

$$\bar{Q}_T = \bar{Q}_L + \bar{Q}_C = jQ_L - jQ_C = j(Q_L - Q_C) \quad (\text{乏爾, VAR})$$

12. 視在功率 S 、平均功率 P 、虛功率 Q 的大小，可以使用直角三角形表現其關係如下：

$$S = VI = \sqrt{P^2 + Q^2} \quad (\text{伏安, VA})$$

$$P = VI \cos\theta \quad (\text{瓦特, W})$$



$$Q = VI \sin \theta \text{ (乏爾, VAR)}$$

以上稱為功率三角形 (power triangle)。

13. 功率因數 PF 定義如下：

$$PF = \cos \theta (\theta_v - \theta_i)$$

(1) 若電流 ($\bar{I}$) 超前電壓 ($\bar{V}$) (電容性負載) 則稱功因超前。

(2) 若電流 ($\bar{I}$) 落後電壓 ($\bar{V}$) (電感性負載) 則稱功因落後。

10-7 課後習題

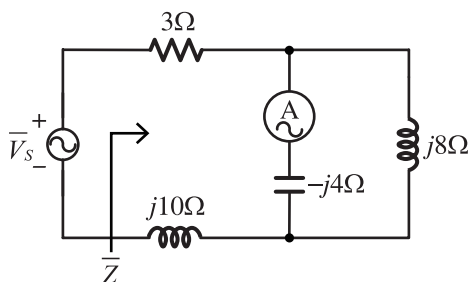
選擇題

1. 如右圖所示電路，其中 $\textcircled{A}$ 為理想電流表。

統測 113

總阻抗 $\bar{Z}$ 為何？

- (A) $(3-j8)\Omega$
 (B) $(3-j14)\Omega$
 (C) $(3+j2)\Omega$
 (D) $(3+j4)\Omega$



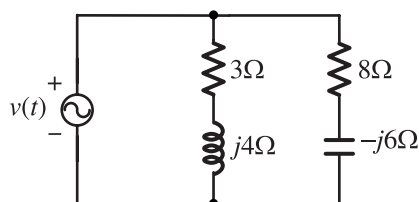
2. 本題為題組，電路圖同第 1 題，若電流表指示值為 4A，則下列敘述何者正確？

- (A) 電源供給的平均功率為 108W (B) 電源供給的虛功率為 8VAR
 (C) 電源供給的視在功率為 20VA (D) 電路的功率因數為 0.83 超前

3. 如右圖所示電路，若流經 8Ω 電阻之電流有效值為 10A，則電源供給之平均功率 P 與虛功率 Q 分別為何？

統測 112

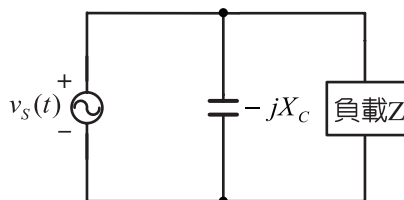
- (A) $P=1000\text{W}$ 、 $Q=2000\text{VAR}$
 (B) $P=2000\text{W}$ 、 $Q=1000\text{VAR}$
 (C) $P=2000\text{W}$ 、 $Q=2000\text{VAR}$
 (D) $P=1000\text{W}$ 、 $Q=1000\text{VAR}$



4. 如右圖所示交流電路，電源電壓 $v_s(t)=200\sqrt{2}\sin(377t)\text{V}$ ，負載 Z 為電感性負載，其視在功率為 5kVA、實功率（平均功率）為 3kW；若電源的功率因數為 1.0，則電容抗 X_c 為何？

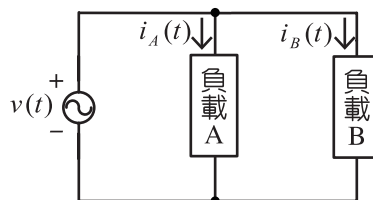
統測 111

- (A) 5Ω (B) 10Ω (C) 15Ω (D) 20Ω



5. 如右圖所示之交流穩態電路，若 $v(t)=240\sqrt{2}\cos(377t)\text{V}$ 、 $i_A(t)=10\sqrt{2}\cos(377t-45^\circ)\text{A}$ 、 $i_B(t)=20\cos(377t+90^\circ)\text{A}$ ，則電源所供應之視在功率為何？

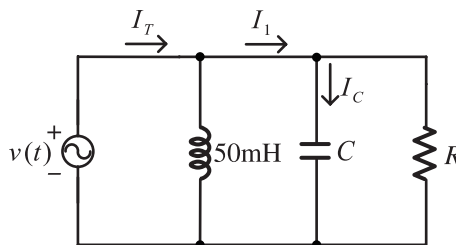
統測 110



(A) 4800VA (B) $2400(1+\sqrt{2})$ VA

(C) $2400\sqrt{2}$ VA (D) 2400VA

6. 如右圖所示 RLC 並聯電路，電源電壓 $v(t) = 100\sqrt{2}\sin(1000t)$ V，若 I_1 的電流大小為 10A， I_C 的電流大小為 8A，則電路的功率因數為何？ 統測109



(A) 0.5 (B) 0.707 (C) 0.886 (D) 1

7. 某單相負載端電壓 $v_L(t) = 400\sin(377t)$ V，負載電流 $i_L(t) = 40\sin(377t - 60^\circ)$ A，則下列敘述何者正確？ 統測 111

(A) 負載的視在功率為 16kVA
 (B) 負載的實功率 (平均功率) 為 8kW
 (C) 負載的虛功率為 $8\sqrt{3}$ kVAR (電感性)
 (D) 負載的最大瞬間功率為 12kW

8. 有一單相交流電路，若電源電壓 $v(t) = 120\sin(314t + 30^\circ)$ V，電源電流 $i(t) = 2\sin(314t - 15^\circ)$ A，則下列對此電路的敘述，何者正確？ 統測 105

(A) 最小瞬間功率 $P_{\min} = -120$ W (B) 平均功率 $P = 120$ W
 (C) 虛功率 $Q = 60$ VAR (D) 瞬間功率的頻率 $f_p = 100$ Hz

9. 某 RL 並聯電路的電阻 $R = 4\Omega$ ，輸入電壓 $\bar{V}_s = 40\angle 0^\circ$ V，若總視在功率大小為 500 VA，則電感抗約為多少歐姆？ 統測104

(A) 2.66 (B) 5.33 (C) 10.66 (D) 16

10. 將交流電壓電源 $v(t) = 100\sqrt{2}\sin(200t - 30^\circ)$ V 與 $50\mu\text{F}$ 電容器串聯，下列敘述何者錯誤？ 統測109

(A) 瞬間功率的最大值為 100W (B) 瞬間功率的角頻率為 200rad/s
 (C) 平均功率為 0W (D) 電壓相位落後電流相位 90°

11. 一個交流電壓源 $v(t) = 110\sqrt{2}\cos(120\pi t + 30^\circ)$ V，提供電流 $i(t) = 10\cos(120\pi t - 30^\circ)$ A，則下列敘述何者正確？ 統測107

(A) 瞬間功率的最大值 $P_{\max} = 825$ W
 (B) 瞬間功率的最大值 $P_{\max} = 1100\sqrt{2}$ W
 (C) 瞬間功率的頻率 $f_p = 60$ Hz
 (D) 瞬間功率的頻率 $f_p = 120$ Hz

12. 有一 RC 串聯電路，已知其電阻 $R=24\Omega$ 以及電容抗 $X_C=18\Omega$ 。若將此電路接於 $v(t)=120\cos(377t+30^\circ)\text{V}$ 之電源，則電源所供應之最大瞬間功率為何？
統測 110
(A) 480W (B) 432W (C) 384W (D) 192W

素養觀念題

- 圖 (1) 橘紅色是 $v(t)$ 、藍色是 $i(t)$ 、綠色是 $p(t)$ ，請問負載是？(1) 純電阻 (2) 純電感 (3) 純電容。請問有沒有虛功率？_____
- 圖 (2) 橘紅色是 $v(t)$ 、藍色是 $i(t)$ 、綠色是 $p(t)$ ，請問負載是 (1) 純電阻 (2) 純電感 (3) 純電容。請問電流落後還是超前？_____，落後或超前幾度？_____，其平均功率是？_____。

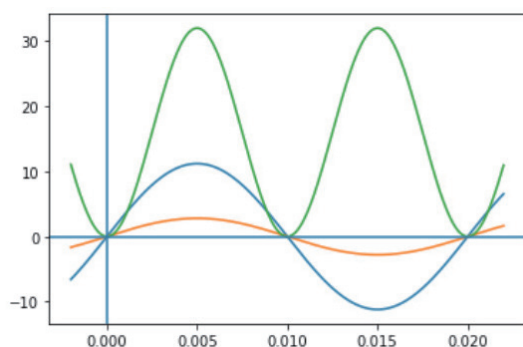


圖 (1)

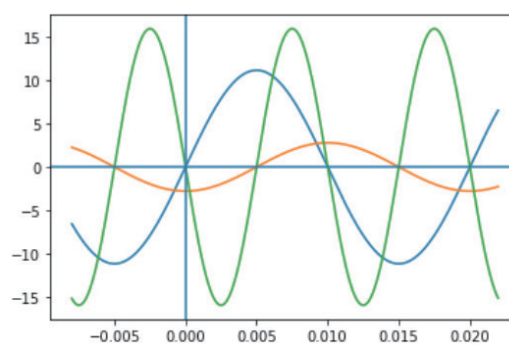


圖 (2)

- 圖 (3) 橘紅色是 $v(t)$ 、藍色是 $i(t)$ 、綠色是 $p(t)$ ，請問負載是 (1) 純電阻 (2) 純電感 (3) 純電容。請問電流落後還是超前？_____，落後或超前幾度？_____，其平均功率是？_____。
- 圖 (4) 橘紅色是 $v(t)$ 、藍色是 $i(t)$ 、綠色是 $p(t)$ 。請問電流落後還是超前？_____，落後或超前幾度？(1) 90° (2) 60° (3) 45° (4) 15° (請自己用尺量)。

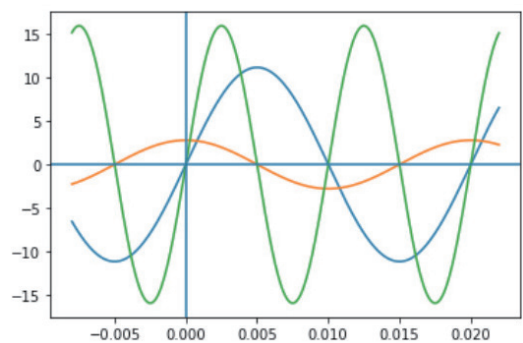


圖 (3)

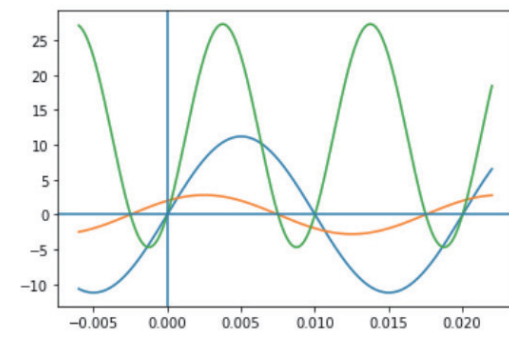
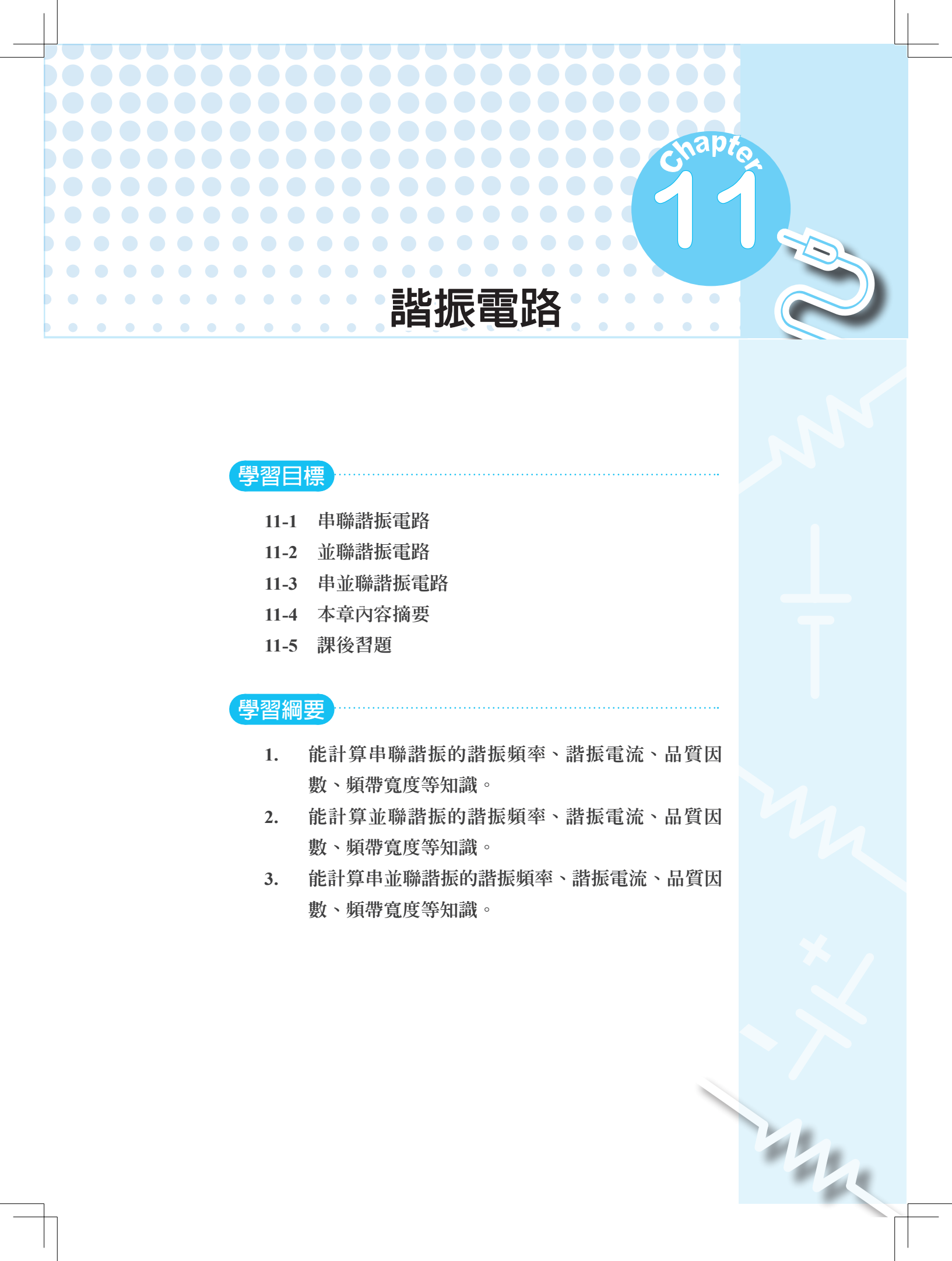


圖 (4)



Chapter 11

諧振電路

學習目標

- 11-1 串聯諧振電路
- 11-2 並聯諧振電路
- 11-3 串並聯諧振電路
- 11-4 本章內容摘要
- 11-5 課後習題

學習綱要

1. 能計算串聯諧振的諧振頻率、諧振電流、品質因數、頻帶寬度等知識。
2. 能計算並聯諧振的諧振頻率、諧振電流、品質因數、頻帶寬度等知識。
3. 能計算串並聯諧振的諧振頻率、諧振電流、品質因數、頻帶寬度等知識。

諧振(resonance)

在力學裡的盪鞦韆運動就是一種諧振運動，我們只要按照鞦韆轉動的頻率，給予一個很小的推力，就能讓鞦韆維持擺動。因為此推力所作的功，先轉為動能，有了動能，鞦韆就上升，鞦韆上升，重力位能就上升，也就是動能轉為重力位能。當鞦韆達最高點時，鞦韆速度為零，動能為零，此時動能完全以重力位能儲存。下一瞬間，鞦韆持續往下運動，當鞦韆達最低點時，速度達最快，轉動動能達最大，重力位能達最小。接著此轉動動能繼續轉為重力位能，直到達最高點時，此重力位能又轉為轉動動能。若沒有摩擦力，此鞦韆將持續進行此擺動，此一推一挽就能讓物體持續運動，但是因為鞦韆的轉盤有摩擦力，所以我們要依照其頻率，給予一個小小的推力，此鞦韆就可持續運動，我們稱此運動為簡諧運動，此「諧」就代表此物體處於「諧振」狀態。

在電學裡，電容與電感，若將其串聯，如圖 11a，或並聯，如圖 11b，調整電源頻率逐漸從 1Hz 增加，電感阻抗將上升，電容阻抗將下降，將會有一個頻率，使得電容與電感的阻抗相同，此時，因為電容與電感阻抗，相位相反，兩者互相抵銷，總阻抗僅剩電阻，所以總電流達最大，此時電容所放的電剛好將電感充電，電感放電時也剛好讓電容充電，內部電子也是處於一推一挽的持續運動，我們稱此為諧振電路。以上即為本章的重點，學習本章的諧振現象，將有助於往後電子電路的設計，以下分別說明串聯與並聯諧振電路。

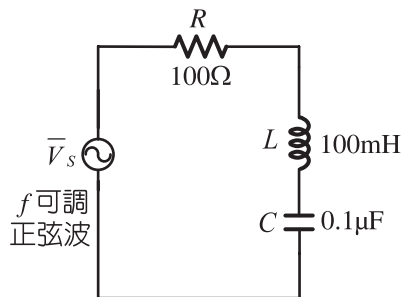


圖 11a 串聯諧振電路

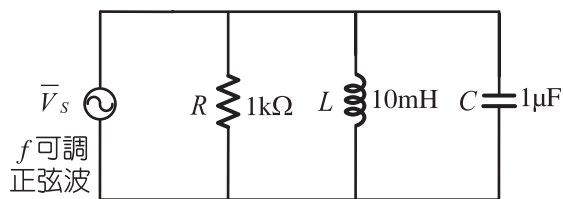


圖 11b 並聯諧振電路

11-1 串聯諧振電路

圖 11a 是 RLC 串聯電路，此電路電感阻抗 ($\bar{X}_L$)、電容阻抗 ($\bar{X}_C$) 分別如下：

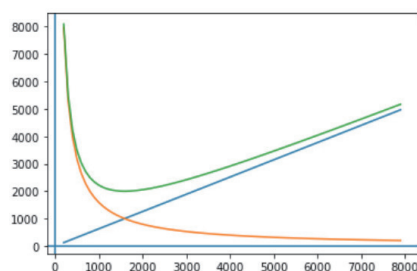
$$\bar{X}_L = 2\pi fL \angle 90^\circ$$

$$\bar{X}_C = \frac{1}{2\pi fC} \angle -90^\circ$$

調整電源頻率由 1Hz 逐漸增加時，電感阻抗將增加，電容阻抗將變小。我們撰寫 Python 程式（程式 11-1a），頻率 f 從 200Hz 到 8000Hz 繪出其電感阻抗 X_L 、電容阻抗 X_C 與電感電容合阻抗 ($X_L + X_C$)。程式 11-1a 的輸出結果如圖 11-1a，藍色是電感阻抗，其阻抗隨者頻率 f 增加而逐漸增加；橘紅色是電容阻抗，其阻抗隨者頻率 f 增加而逐漸減少。（頻率不能從 0Hz 開始，不然計算電容阻抗時會當掉，本例由 200Hz 到 8000Hz，是多次修正結果，圖形視覺效果比較好）

```
import math as ma
pi=ma.pi
u=0.000001;m=0.001;k=1000
R=100;L=100*m;C=0.1*u
V=2
f=1/(2*ma.pi*(L*C)**(1/2))
print(f) #1591
import matplotlib.pyplot as plt #載入繪圖 matplotlib.pyplot 模組，才能繪圖
import numpy as np #載入numpy 模組，繪圖用數值模組
print(np.pi) #輸出pi值
t = np.arange(200, 8000, 100)
y1 =2*pi*L*t #XL阻抗
y2 =1/(2*pi*C*t) #XC阻抗
y3=y1+y2#XL+XC總阻抗
plt.plot(t,y1)#XL 藍色，
plt.plot(t,y2)#XC 橘色
plt.plot(t,y3)#Z 綠色
plt.axhline(y=0)#x軸
plt.axvline(x=0)#y軸
plt.show()#於螢幕輸出圖形
```

程式 11-1a



（藍色是 X_L ，橘色是 X_C ，綠色是 Z ）

圖 11-1a 電感、電容阻抗圖

我們發現 X_L 隨著頻率 f 增加而越來越大， X_C 隨著頻率 f 增加而越來越小，當兩者阻抗相同，

$$X_L = X_C \Rightarrow 2\pi fL = \frac{1}{2\pi fC} \quad \text{推得}$$

$$f_0 = f = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \quad (\text{赫茲, Hz})$$

(公式11-1a)

此頻率 f ，我們以 f_0 表示， f_0 稱為諧振頻率。此時：

$$\overline{Z_0} = R + jX_L - jX_C = R$$

串聯諧振時，電路總阻抗最小，電流將會最大，此諧振電流 I ，我們以 I_0 表示，依據歐姆定律：

$$I_0 = \frac{V}{Z_0} = \frac{V}{R} \quad (\text{達最大, 安培, A})$$

(公式11-1b)

諧振時，既然電路為純電阻，所以電流相位與電壓相位相同。若 $R=0$ ，表示此電路為 LC 串聯諧振 I_0 為無限大。

範例11-1a

在 RLC 串聯電路中，當接上頻率 1kHz 的正弦波電壓源時，電路中 $R=20\Omega$ ， $X_L=4\Omega$ ， $X_C=16\Omega$ ；若調整電源的頻率使得線路電流最大，則此時的電源頻率為何？

統測 106

(A) 250Hz (B) 500Hz (C) 2kHz (D) 4kHz

解

(1) 由題目 $f=1\text{kHz}$ 時 $X_L=4\Omega \Rightarrow X_L=\omega L=2\pi fL \Rightarrow L=\frac{X_L}{2\pi f}$ 。

(2) 由題目 $f=1\text{kHz}$ 時 $X_C=16\Omega \Rightarrow X_C=\frac{1}{\omega C}=\frac{1}{2\pi fC} \Rightarrow C=\frac{1}{2\pi fX_C}$ 。

(3) 調整頻率，當電流得到最大，表示頻率為諧振頻率。

(4) 諧振時 $f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{\frac{X_L}{2\pi f} \cdot \frac{1}{2\pi fX_C}}}$

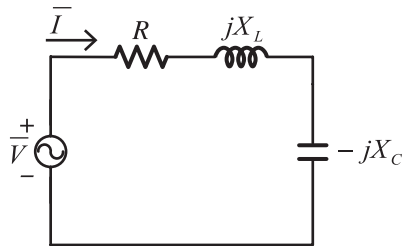
$$= \frac{1}{\frac{2\pi}{2\pi f} \sqrt{\frac{X_L}{X_C}}} = f \sqrt{\frac{X_C}{X_L}} = 1000 \sqrt{\frac{16}{4}} = 2\text{kHz}$$

(5) 本題亦可程式撰寫如下，由電腦幫忙所有運算。

```
import math as ma
pi=ma.pi;print("pi",pi)
u=0.000001;m=0.001;k=1000
R=20;f=1*k;XL=4;XC=16
L=XL/(2*pi*f)
C=1/(2*pi*f*XC)
f0=1/(2*ma.pi*(L*C)**(1/2))
print("f0=",f0) #2000
```

自我練習

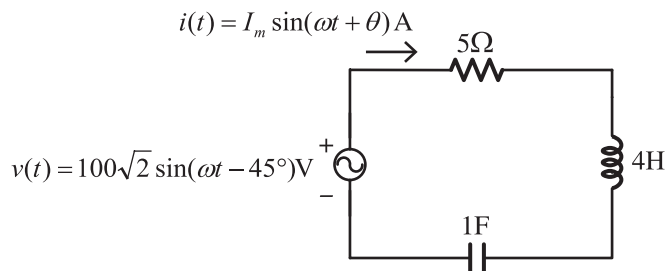
1. 有一 RLC 串聯電路接於正弦波電壓源，已知電源頻率為 60Hz 、 $R=5\Omega$ 、 $X_L=0.4\Omega$ 、 $X_C=10\Omega$ 。當此電路發生諧振時，其諧振頻率為何？ 統測 110
(A) 100Hz (B) 200Hz (C) 300Hz (D) 400Hz
2. 如右圖所示，可調整頻率之正弦波交流電壓源 $V=110\text{V}$ ，當角頻率 $\omega=500\text{ rad/sec}$ 時， $R=10\Omega$ 、 $X_L=250\Omega$ 、 $X_C=40\Omega$ 。調整電源頻率至諧振時，則下列敘述何者正確？ 統測 107
(A) 諧振角頻率 $\omega_0=200\text{ rad/sec}$
(B) 諧振角頻率 $\omega_0=300\text{ rad/sec}$
(C) $\bar{I}$ 為 20A
(D) $\bar{I}$ 為 10A



範例11-1b

如下圖所示之 RLC 串聯電路，若電流 $i(t)$ 與電源電壓 $v(t)$ 同相位，則 $i(4\pi)$ 之電流值為何？ 統測 109

- (A) -20 (B) 20A
(C) $-\frac{20}{\sqrt{2}}\text{A}$ (D) $\frac{20}{\sqrt{2}}\text{A}$



解

(1) 電流 $i(t)$ 與電源電壓 $v(t)$ 同相，表示此時電路進入諧振。諧振時

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{4 \times 1}} = \frac{1}{4\pi} \text{ Hz 且 } \theta = -45^\circ \text{ (與電壓相位相同)。$$

$$(2) \omega_0 = 2\pi f_0 = 2\pi \times \frac{1}{4\pi} = 0.5 \text{ rad/sec。}$$

$$(3) \text{諧振時 } \bar{Z} = R \Rightarrow I = \frac{V}{R} = \frac{100}{5} = 20 \text{ A} \Rightarrow I_m = 20\sqrt{2} \text{ A。}$$

$$(4) \text{由以上 } I_m、\omega_0 \text{ 與 } \theta，\text{得到 } i(t) = 20\sqrt{2} \sin(0.5t - 45^\circ) \text{ A。}$$

$$(5) t = 4\pi \text{ 代入 } i(4\pi) = 20\sqrt{2} \sin(2\pi - 45^\circ) = 20\sqrt{2} \times \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -20 \text{ A。}$$

(6) 以上計算，亦可撰寫程式如下，由程式處理所有計算。

```
import math as ma
pi=ma.pi;print("pi=",pi)
u=0.000001;m=0.001;k=1000
V=100
R=5;L=4;C=1
f0=1/(2*ma.pi*(L*C)**(1/2))
print("f0=",f0)
I0=V/R;print("I0=",I0)
si=45
si=(si/180)*pi
i0=I0*1.41*ma.sin(2*pi*f0*4*pi-si)
print("i0=",i0)
```

自我練習

1. RLC 串聯電路中，若電阻 R 單位為 Ω 、電感 L 單位為 H 、電容 C 單位為 F ，則此電路之諧振角頻率 ω_r (單位為 rad/s) 為何？ 統測 103

(A) $\sqrt{\frac{C}{L}}$ (B) $\frac{1}{\sqrt{LC}}$ (C) $\sqrt{\frac{L}{C}}$ (D) $\sqrt{LC}$

品質因數(quality factor)

電路諧振時，在電感與電容間相互儲存並轉移的能量與電阻消耗的能量之比值，來表示該電路的品質。品質愈高表示電路的損耗愈小，效率愈高。故品質因數（quality factor， Q ）之定義為：電路諧振時的電感抗虛功率（ Q_L ）或電容抗虛功率（ Q_C ）與電阻平均功率（ P_o ）之比值。本例電感與電容處於諧振，阻抗相同，諧振能量取任一元件，計算結果都相同。第一：諧振能量取電感的計算如下：

$Q = \frac{I_0^2 X_L}{I_0^2 R}$ （功率共有 3 種計算方式，分別是 $I^2 R$ 、 IV 與 $\frac{V^2}{R}$ ，因為串聯時，電流相同，所以本例功率使用 $I_0^2 X_L$ 與 $I_0^2 R$ ）

將 I_0^2 上下消掉，得到：

$$Q = \frac{X_L}{R} \quad (\text{公式11-1c})$$

第二：諧振能量取電容的計算如下：

$$Q = \frac{I_0^2 X_C}{I_0^2 R} = \frac{X_C}{R} \quad (\text{電容諧振能量 } I_0^2 X_C, \text{ 電阻消耗能量 } I_0^2 R)$$

以上得到 Q 與 X_L 、 X_C 與 R 的關係。諧振時 $f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$

由於 $Q = \frac{X_L}{R}$ ， X_L 以 $2\pi f_0 L$ 代入，得到

$$Q = \frac{2\pi f_0 L}{R}, \quad f_0 \text{ 繼續以 } \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \text{ 代入，得到}$$

$$Q = \frac{2\pi \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} L}{R} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} \quad (\text{公式11-1d})$$

得到 Q 與 R 、 L 、 C 的關係，由以上數學表示式可知，調整 R 、 L 、 C 可調整最佳的 Q 值。

電感、電容端電壓

由 $Q = \frac{X_L}{R}$ ，分子分母同乘以 I_0 ，得到：

$$= \frac{I_0 X_L}{I_0 R} = \frac{V_L}{V_R}$$

若 Q 、 V 已知，可得到

$$V_L = QV_R = QV \quad (\text{諧振時 } V_R = V)$$

(公式11-1e)

也就是諧振時，電感的端電壓會是電源電壓的 Q 倍。同理，由於

$$Q = \frac{X_C}{R} = \frac{I_0 X_C}{I_0 R} = \frac{X_C}{V_R}$$

可得到

$$V_C = QV_R = QV$$

(公式11-1f)

也就是諧振時，電容的端電壓也會是電源的 Q 倍。由以上的推導，請於設計電路時，留意電感與電容的耐壓。

頻帶寬度(bandwidth)與選擇性(selectivity)

音叉實驗

音叉實驗可參考 <https://www.youtube.com/watch?v=NEe4FZzRIHE>，由以上實驗，我們發現兩支相同震動頻率的音叉放在一起（請留意沒有接觸），其震動頻率，可經由空氣傳導，將一個頻率傳送到另一相同頻率的音叉。收音機與電視就是依照此原理設計而成，每一個電台都有一個固定的載波，將自己的信號發射在大氣中，當我們想收聽此頻率時，只要調整自己天線的頻率，就可以收到同一頻率的電台聲音。

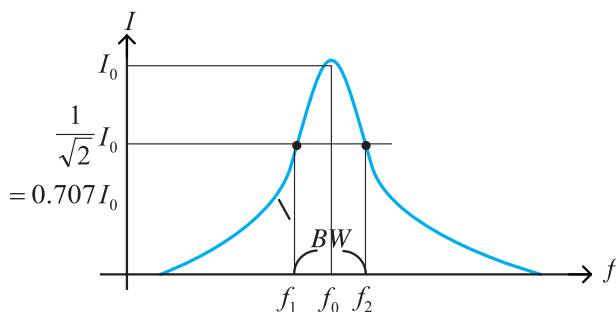


圖 11-1b RCL 串聯電路 $I-f$ 之頻率響應曲線

諧振電路可用來作為收音機的電台選擇，調整天線的諧振頻率就可接收對應的電台。相信大家都有一個經驗，當您用旋扭選台時，有些電台頻帶寬度很窄，選擇性很高，很快就可以就定位；有些電台頻帶較寬，總要花點時間調整旋鈕才能清晰收聽，以下我們就介紹頻寬、與如何降低頻寬，提高電路的選擇性。由圖 11-1a 的 Z - f 阻抗圖，可得 RLC 串聯電路的 I - f 之變化曲線如圖 11-1b。由圖 11-1b 可知，電源頻率在諧振頻率 f_0 時有最大的電路電流 I_0 ，頻率變大或變小，電流均下降。因此定義：由**電流最大值**下降至最大值 I_0 的 $1/\sqrt{2}$ 倍（0.707 倍）之間對應的頻率範圍稱為**頻帶寬度**（bandwidth，簡寫為 BW ，簡稱**頻寬**）。在相同諧振頻率 (f_0) 下， I 對 f 之響應曲線愈尖銳，頻寬 (BW) 愈窄，則表示電路之選擇性愈佳。反之， I 對 f 之響應曲線愈平緩，頻寬 (BW) 愈寬，則表示該電路之選擇性愈差。

頻率往下調，當電流為 $0.707I_0$ 時，為下截止頻率；頻率往上調，電流為 $0.707I_0$ 時，為上截止頻率。依照以上定義，此兩個頻率對應的頻率範圍，稱為**頻帶寬度**。

$$BW = f_2 - f_1 \text{ (赫茲, Hz)}$$

而電路諧振時的平均功率為

$$P_0 = I_0^2 \times R$$

截止頻率時的平均功率為

$$P = I^2 \times R = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} I_0\right)^2 \times R = \frac{1}{2} I_0^2 \times R = \frac{1}{2} \times P_0 \text{ (瓦特, W)} \quad \text{(公式11-1g)}$$

由上式可知，截止頻率時的平均功率為諧振頻率時平均功率的一半，因此截止頻率又稱為**半功率頻率 (half-power frequency)**。

當 RLC 串聯諧振電路品質因數 $Q \geq 10$ 時，圖 11-1b 為一對稱於諧振頻率之曲線，可得截止頻率：

$$f_2 = f_0 + \frac{BW}{2} \text{ (赫茲, Hz)}$$

$$f_1 = f_0 - \frac{BW}{2} \quad (\text{赫茲, Hz})$$

頻帶寬度 BW 經證明可與諧振頻率 f_0 及品質因數 Q 兩者建立關係，其關係式為：

$$BW = \frac{f_0}{Q} \quad (\text{赫茲, Hz})$$

(公式11-1h)

以上證明過程繁雜，不是高一學生的學習重點，本書先省略。

由此公式，亦可看出品質因數 Q 愈大，頻寬 BW 就小，選擇性就高，使用者很快就可以找到對應的電台。

範例11-1c

串聯諧振電路如圖 (1)，電源 $\bar{V}_S = 2\text{V(rms)}$ ，頻率可調整之正弦波。請將電源頻率慢慢調升，當電路諧振時，請計算以下理論值 (1) 諧振頻率。(2) 諧振電流。(3) 品質因數。(4) 電感端電壓。(5) 電容端電壓。(6) 頻帶寬度。(7) 上下截止電流。(8) 下截止頻率。(9) 上截止頻率。

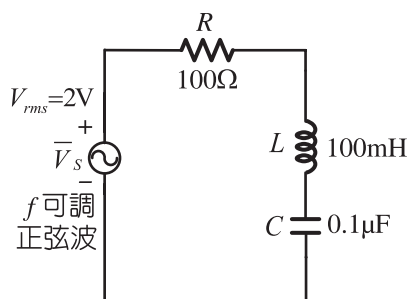


圖 (1) 電路圖

操作步驟

(1) 諧振頻率 f_0 ：

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = \frac{1}{2 \cdot 3.14 \sqrt{100\text{m} \cdot 0.1\mu}} \doteq 1591\text{Hz}$$

以上計算有點複雜，所以寫成 Python 程式如下：

```
import math;pi=math.pi;m=0.001;u=0.000001
L=100*m;C=0.1*u
print(1/(2*pi*(L*C)**(1/2)))#1591
```

(2) 諧振電流 I_0 ：諧振時 V_L 與 V_C 互消抵消， $V_{rms} = 2\text{V}$ ，所以：

$$I_0 = \frac{V_{rms}}{R} = \frac{2}{100} = 20\text{mA}$$

(3) 品質因數 Q :

$$Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{1}{100} \sqrt{\frac{100m}{0.1\mu}} = 10$$

以上計算有點複雜，所以寫成 Python 程式如下：

```
import math;pi=math.pi;m=0.001;u=0.000001
L=100*m;C=0.1*u;R=100
print((L/C)**(1/2)/R)#10
```

(4) 電感端電壓 V_L :

$$V_L = QV = 10 \cdot 2 = 20V$$

(5) 電容端電壓 V_C :

$$V_C = QV = 10 \cdot 2 = 20V$$

(6) 頻帶寬度 BW :

$$BW = \frac{f_0}{Q} \doteq \frac{1591}{10} \doteq 159Hz$$

(7) 上下截止電流 :

$$I_1, I_2 = \frac{I_0}{\sqrt{2}} \doteq \frac{20m}{1.4} \doteq 14mA$$

(8) 下截止頻率 f_1 :

$$f_1 = f_0 - \frac{BW}{2} \doteq 1591 - \frac{159}{2} \doteq 1511Hz$$

(9) 上截止頻率 f_2 :

$$f_2 = f_0 + \frac{BW}{2} \doteq 1591 + \frac{159}{2} \doteq 1671Hz$$

補充說明

1. 以上電路，可實際接線，如下頁圖 (2)，先調整信號產生器的輸出電壓，然後調整頻率，請讀者觀察 CH2 信號達最大時的頻率，即為諧振頻率，並請觀察 V_R 信號 (CH2) 有沒有與電源信號 $\bar{V}_S$ (CH1) 同相。

2. 圖 (3) 黃色 CH1 是 $v_s(t)$ 波形 (Volts/Div=1V)，藍色 CH2 是 $v_R(t)$ 波形 (Volts/Div=500mV)，Time/Div=100 μ s，請問諧振頻率 = _____，諧振電流有效值 = _____。

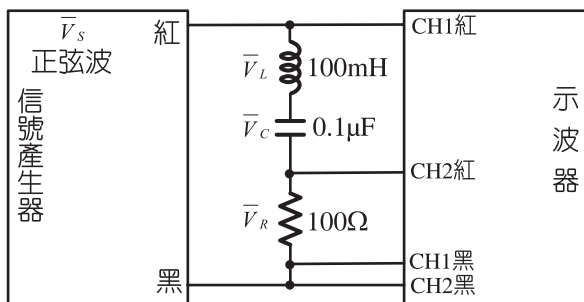


圖 (2)

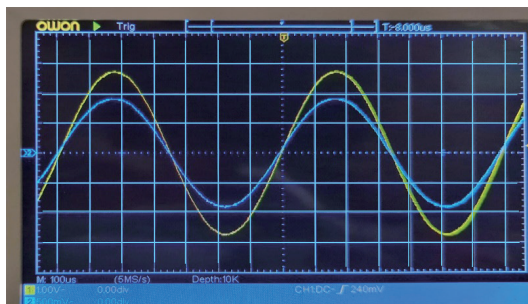


圖 (3)

3. 圖 (4) 黃色 CH1 是 $v_s(t)$ 波形 (Volts/Div=1V)，藍色 CH2 是 $v_L(t)$ 波形 (Volts/Div=5V)，Time/Div=100 μ s，請問 V_L 有效值 = _____， V_L 相位角 = _____。
4. 圖 (5) 黃色 CH1 是 $v_s(t)$ 波形 (Volts/Div=1V)，藍色 CH2 是 $v_C(t)$ 波形 (Volts/Div=5V)，Time/Div=100 μ s，請問 V_C 有效值 = _____， V_C 相位角 = _____， V_C 、 V_L 有沒有大小相等、相位相反？_____

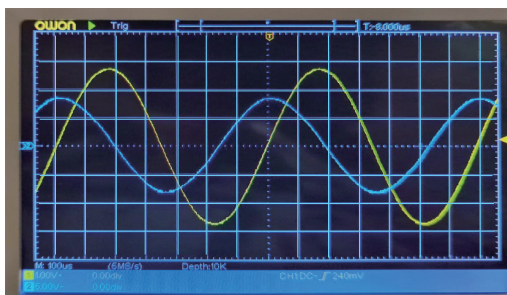


圖 (4)

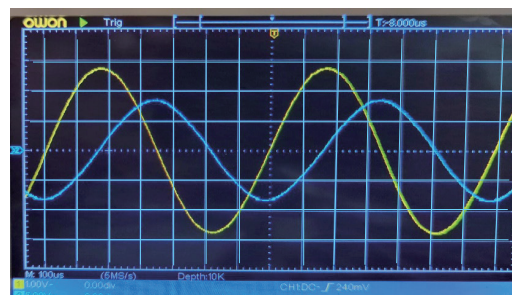


圖 (5)

5. 圖 (6) 黃色 CH1 是 $v_s(t)$ 波形 (Volts/Div=1V)，藍色 CH2 是 $v_R(t)$ 下截止頻率波形 (Volts/Div=200mV)，Time/Div=100 μ s，請問下截止頻率 = _____，下截止電流有效值 = _____，下截止電流有效值有沒有諧振電流的 0.7 倍？_____

6. 圖 (7) 黃色 CH1 是 $v_s(t)$ 波形 (Volts/Div=1V)，藍色 CH2 是 $v_R(t)$ 上截止頻率波形 (Volts/Div=200mV)，Time/Div=100 μ s，請問上截止頻率 = _____，上截止電流有效值 = _____，BW=_____。

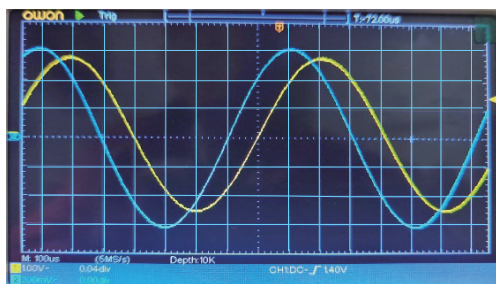


圖 (6)

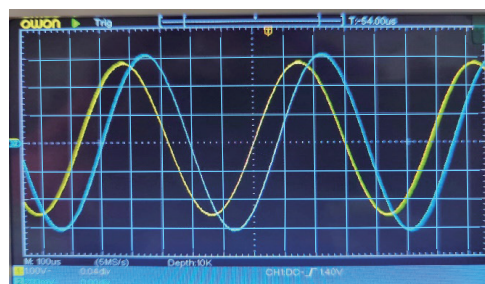


圖 (7)

範例11-1d

有一 RLC 串聯電路，若電源電壓 $V=100\text{V}$ 、 $R=10\Omega$ 、 $L=20\text{mH}$ 、 $C=200\text{ }\mu\text{F}$ ，當電路諧振時，則下列敘述何者正確？

統測 105

- (A) 功率因數為 1，諧振頻率為 800Hz
 (B) 品質因數為 1，頻帶寬度為 8Hz
 (C) 電阻器兩端的電壓大小為 100V，電容器兩端的電壓大小為 100V
 (D) 電源電流為 10A，平均功率為 100W

解

- (1) 電路諧振時 $f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{20\text{m} \times 200\mu}} = 79.5 \div 80\text{Hz}$ 。
- (2) 因為諧振時，電壓與電流同相， $\theta = \theta_v - \theta_i \div 0^\circ$ ，所以功率因數 $\cos\theta=1$ 。
- (3) 諧振時 $X_L=X_C$ ，且互相抵消，所以 $\bar{Z}=R$ 。依據歐姆定律，

$$I_0 = \frac{V}{R} = \frac{100}{10} = 10\text{A}。$$
- (4) 依據公式 11-1d： $Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{1}{10} \sqrt{\frac{20\text{m}}{200\mu}} \div 1。$
- (5) $V_R = I_0 R = 10 \times 10 = 100\text{V}。$
- (6) $V_C = Q V_R = Q V = 1 \times 100 = 100\text{V}。$
- (7) 平均功率 $P = I_0^2 \cdot R = 10^2 \times 10 = 1000\text{W}。$

(8) 以上計算，可寫程式如下，由電腦完成所有計算。

```
import math as ma
u=0.000001;m=0.001;k=1000
R=10;L=20*m;C=200*u
V=100;f0=1/(2*ma.pi*(L*C)**(1/2))
print("f0=",f0) #79.5
I0=V/R;print("I0=",I0)#10
VR=I0*R;print("VR=",VR)#100
Q=ma.sqrt(L/C)/R;print("Q=",Q)#1
VC=Q*V;print("VC=",VC)#100
BW=f0/Q;print("BW=",BW)#79.5
P=I0*I0*R
print("P=",P)#1000
```

自我練習

1. RLC 串聯電路發生諧振時，下列敘述何者正確？

統測 104

- (A) 阻抗最小，功率因數 0.707
- (B) 阻抗最小，功率因數 1.0
- (C) 阻抗最大，功率因數 0.707
- (D) 阻抗最大，功率因數 1.0

11-2 並聯諧振電路

圖 11-2a 是 RLC 並聯電路，電源頻率 f 可調。調整 f 由小到大，則 $X_L = 2\pi fL$ 逐漸變大， $X_C = \frac{1}{2\pi fC}$ 逐漸變小；若 $X_L = X_C$ 時 $I_L = I_C$ ，且因其相位相差 180° ，此時電感電流 I_L 與電容電流 I_C 形成一推一挽，電感輸出功率時，由電容儲存；下一個相位則由電容輸出所儲存的功率，再由電感儲存，形成諧振現象。由

$$X_L = 2\pi fL$$

$$X_C = \frac{1}{2\pi fC}$$

諧振時 $X_L = X_C$ 推得

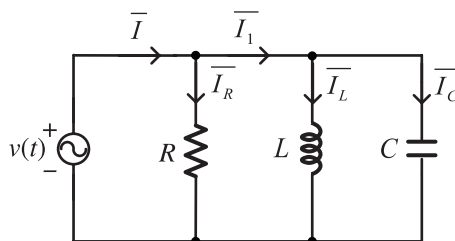


圖 11-2a RLC 並聯電路

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \quad (\text{赫茲, Hz})$$

(公式11-2a)

此與 RLC 串聯諧振時相同。

▶ 諧振電流

諧振時，電感電流與電容電流一推一挽，互相抵消，所以電感與電容合電流為 0，圖 11-2a 的 $\bar{I}_1 = 0$ ，且總電流 $\bar{I} = \bar{I}_0 = \bar{I}_R$ 達最小。(備註：前面串聯諧振是達最大)。

$$\bar{I}_0 = \frac{\bar{V}}{R} \quad (\text{達最小}) \quad (\text{安培, A})$$

(公式11-2b)

若 R 未接，則為 LC 並聯諧振，視 R 無限大，此時 $\bar{I}_0 = 0$ 。

▶ 品質因數 Q

並聯諧振與串聯諧振品質因數 Q 的定義相同，都是虛功率與電阻平均功率的比值。以下以電感來計算。功率的計算有 3 種方式，分別是 $\frac{V^2}{R}$ 、 IV 與 I^2R ，因為並聯時電壓相同，所以本例功率使用 $\frac{V^2}{X_L}$ 與 $\frac{V^2}{R}$

$$Q = \frac{\frac{V^2}{X_L}}{\frac{V^2}{R}} = \frac{R}{X_L}$$

(公式11-2c)

以上得到 Q 與 R 、 X_L 的關係。諧振時 $f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$ ，代入 Q ，可得到 Q 與 R 、 L 、 C 的關係如下：

$$Q = \frac{R}{X_L} = \frac{R}{2\pi f_0 L} = \frac{R}{2\pi \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} L} = R\sqrt{\frac{C}{L}} \quad (\text{公式11-2d})$$

設計電路時，可據此公式，調整 R 、 L 、 C 可得到優良的 Q 值。請留意，並聯品質因數定義相同，但結果卻剛好是串聯品質因數的倒數。

► 電感電流

$$\text{由於 } Q = \frac{R}{X_L} = \frac{\frac{V}{I_R}}{\frac{V}{I_L}} = \frac{I_L}{I_R}$$

$$\text{得到 } I_L = QI_R \quad (\text{公式11-2e})$$

► 電容電流

$$\text{同理 } Q = \frac{R}{X_C} = \frac{\frac{V}{I_R}}{\frac{V}{I_C}} = \frac{I_C}{I_R}$$

$$\text{得到 } I_C = QI_R \quad (\text{公式11-2f})$$

► 頻帶寬度

圖 11-2b 是 RLC 並聯電路的 $I-f$ 曲線圖，電源頻率 f 在 f_0 時電流有最小值 I_0 。因此定義：由電流最小值上升至最小值 $\sqrt{2}$ 倍（1.414 倍）所對應的頻率為 f_1 與 f_2 ，則其範圍（ $f_2 - f_1$ ）稱為頻帶寬度（ BW ）。頻帶寬度（ BW ）、諧振頻率 f_0 與品質因數 Q 三者之間的關係與串聯諧振電路相同：

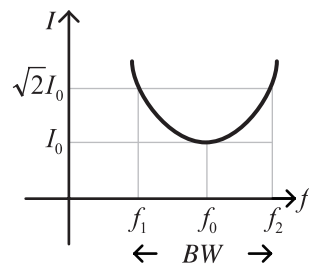


圖 11-2b

$$BW = \frac{f_0}{Q} \quad (\text{赫茲, Hz}) \quad (\text{公式11-2g})$$

將 $f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$ 及 $Q = R \times \sqrt{\frac{C}{L}}$ 代入公式 11-2g，亦可得到頻帶寬度 (BW) 與 R 、 C 的關係如下：

$$BW = \frac{1}{R \times \sqrt{\frac{C}{L}}} = \frac{1}{2\pi RC} \quad (\text{赫茲, Hz}) \quad (\text{公式11-2g})$$

範例11-2a

並聯諧振電路如圖 (1)， $\bar{V}_S = 2\text{V(rms)}$ ，頻率可調整之正弦波。

請計算以下理論值 (1) 諧振頻率。(2) 諧振電流。(3) 品質因數。(4) 電感電流。(5) 電容電流。(6) 頻帶寬度。(7) 上下截止電流。(8) 下截止頻率。(9) 上截止頻率。

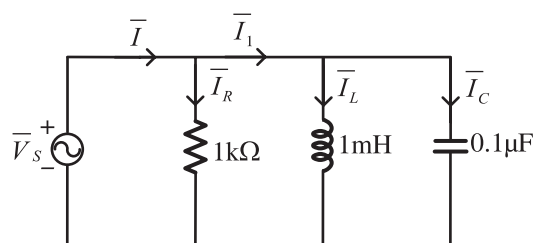


圖 (1) RLC 並聯諧振電路圖

解

(1) 諧振頻率 f_0 ：

並聯諧振與串聯諧振相同，都是 $X_L = X_C$ 時產生諧振。

$$X_L = 2\pi fC$$

$$X_C = \frac{1}{2\pi fC}$$

$$\text{由 } X_L = X_C \text{ 推得 } f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = \frac{1}{2 \cdot 3.14 \sqrt{1\text{m} \cdot 0.1\mu}} \doteq 15.9\text{kHz}$$

以上計算的 Python 程式如下：

```
import math as ma;pi=ma.pi
u=0.000001;m=0.001;k=1000;L=1*m;C=0.1*u
f0=1/(2*pi*(L*C)**(1/2));print("f0=",f0) #15.9k
```

(2) 諧振電流：

諧振時，電感電流與電容電流一推一挽，互相抵消，所以電感與電容合電流 $\bar{I}_1$ 為 0，且總電流 $\bar{I} = \bar{I}_0 = \bar{I}_R$ 達最小。(備註：前面串聯諧振是達最大)。

$$\bar{I}_0 = \frac{\bar{V}}{R} = \frac{2}{1k} = 2\text{mA} \text{ (達最小)}$$

(3) 品質因數 Q ：

並聯諧振與串聯諧振品質因數 Q 的定義相同，都是諧振能量與消耗能量的比，以下以電感來計算，功率的計算有 3 種方式，分別是 $\frac{V^2}{R}$ 、 IV 與 I^2R ，因為並聯時電壓相同，所以本例功率使用 $\frac{V^2}{X_L}$ 與 $\frac{V^2}{R}$

$$Q = \frac{\frac{V^2}{X_L}}{\frac{V^2}{R}} = \frac{R}{X_L}$$

諧振時 $f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$ ，代入 Q

$$\begin{aligned} Q &= \frac{R}{X_L} = \frac{R}{2\pi f_0 L} = \frac{R}{2\pi \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} L} = R\sqrt{\frac{C}{L}} \\ &= 1k\sqrt{\frac{0.1\mu}{1m}} = 1k \times \sqrt{\frac{10^{-7}}{10^{-3}}} = 1k \times \sqrt{10^{-4}} = 1k \times 10^{-2} = 10 \end{aligned}$$

(請留意，並聯品質因數定義相同，但結果卻剛好是串聯品質因數的倒數)

$$(4) \text{ 由於 } Q = \frac{R}{X_L} = \frac{\frac{V}{I_R}}{\frac{V}{I_L}} = \frac{I_L}{I_R}$$

得到 $I_L = QI_R = 10 \cdot 2m = 20\text{mA}$

$$(5) \text{ 同理 } Q = \frac{R}{X_C} = \frac{\frac{V}{I_R}}{\frac{V}{I_C}} = \frac{I_C}{I_R}$$

得到 $I_C = QI_R = 10 \cdot 2m = 20\text{mA}$

(6) 頻帶寬度 BW :

並聯諧振的頻帶寬度，經由科學家不斷實驗，也是與串聯諧振相同。
(過程較複雜，本書不推導)

$$BW = \frac{f_0}{Q} = \frac{15.9k}{10} = 1.59kHz$$

(7) 上下截止電流 :

並聯諧振是諧振時電流最小，當電流達到 $\sqrt{2}$ 倍時，稱為半功率點，如圖(2)。所以上下截止電流為 $I_1, I_2 = 1.4 \times 2m = 2.8mA$ 。

(8) 下截止頻率 f_1 ，上截止頻率 f_2 :

$$f_1 = f_0 - \frac{BW}{2} \doteq 15.9k - \frac{1.59}{2} \doteq 15.1kHz$$

$$f_2 = f_0 + \frac{BW}{2} \doteq 15.9k + \frac{1.59}{2} \doteq 16.7kHz$$

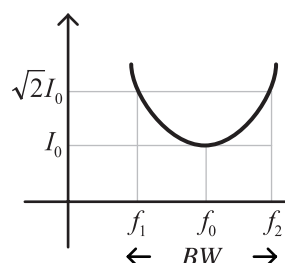


圖 (2)

補充說明

1. 信號產生器、示波器接線如圖 (3) (示波器量電流，都是先串聯 1Ω ，然後量測此 1Ω 電壓)。

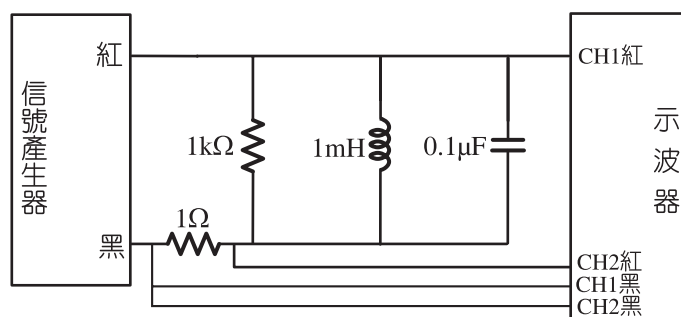
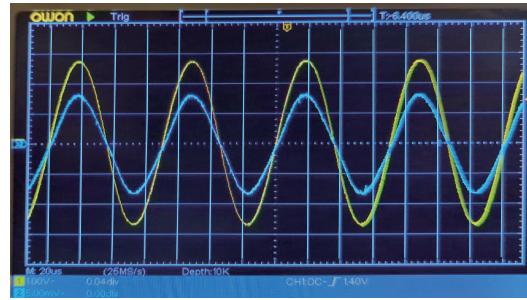


圖 (3)

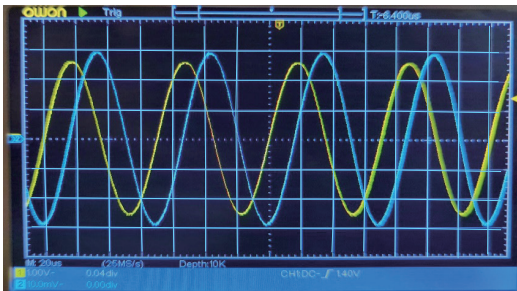
2. 調整信號產生器的 V_m 為 $2\sqrt{2}$ ($\doteq 2.8$)V，然後逐一調整信號產生器的 f ，使得 1Ω 的輸出達最小，此時的 f 即為諧振頻率，並請觀察 CH2 與電源信號 (CH1) 有沒有同相。

3. 圖(4)黃色CH1是 $v_s(t)$ 波形 (Volts/Div=1V)，藍色CH2是 $i(t)$ 波形 (Volts/Div=5mV)，Time/Div=20 μ s，請問諧振頻率=_____，諧振電流有效值=_____。

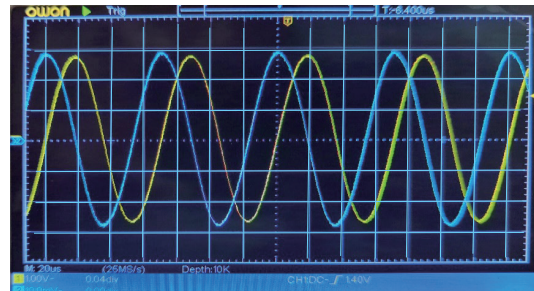


圖(4)

4. 圖(5)黃色CH1是 $v_s(t)$ 波形 (Volts/Div=1V)，藍色CH2是 $i_L(t)$ 波形 (Volts/Div=10mV)，Time/Div=20 μ s，請問 i_L 有效值=_____， i_L 相位角=_____。
5. 圖(6)黃色CH1是 $v_s(t)$ 波形 (Volts/Div=1V)，藍色CH2是 $i_C(t)$ 波形 (Volts/Div=10mV)，Time/Div=20 μ s，請問 i_C 有效值=_____， i_C 相位角=_____， i_C 、 i_L 有沒有大小相等、相位相反？_____



圖(5)



圖(6)

7. 圖(7)黃色CH1是 $v_s(t)$ 波形 (Volts/Div=1V)，藍色CH2是 $v_R(t)$ 下截止頻率波形 (Volts/Div=5mV)，Time/Div=20 μ s，請問下截止頻率=_____，下截止電流有效值=_____，下截止電流有沒有是諧振電流的1.4倍？_____。
8. 圖(8)黃色CH1是 $v_s(t)$ 波形 (Volts/Div=1V)，藍色CH2是 $v_R(t)$ 上截止頻率波形 (Volts/Div=5mV)，Time/Div=10 μ s，請問上截止頻率=_____，上截止電流有效值=_____，下截止電流有沒有是諧振電流的1.4倍？_____，BW=_____。

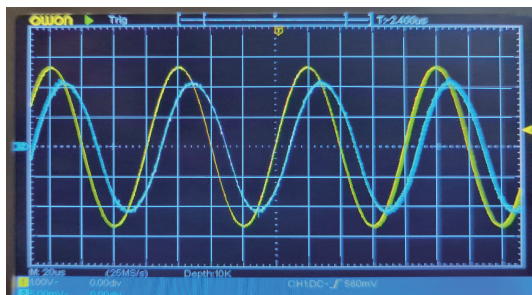


圖 (7)



圖 (8)

範例11-2b

有效值 100V 之交流正弦波電源，若調整其電源頻率使流入一 RLC 並聯電路的總電流為最小，其中 $R=50\Omega$ ， $L=40\text{mH}$ ， $C=100\mu\text{F}$ ，則下列敘述何者正確？

統測 106

- (A) 電源頻率為 80kHz
- (B) 流經電感之電流為 2A
- (C) 流經電容之電流為 1A
- (D) 總消耗功率為 200W

解

(1) RLC 串聯或並聯的諧振頻率都是 $f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{40\text{m} \times 100\mu}} = 80\text{Hz}$ 。

(2) 諧振時 $\bar{Z} = R$ ， $I_0 = \frac{V}{R} = \frac{100}{50} = 2\text{A}$ 。

(3) RLC 並聯的 $Q = R\sqrt{\frac{C}{L}} = 50\sqrt{\frac{100\mu}{40\text{m}}} = 2.5$ 。

(4) 諧振時 $I_C = QI_0 = 2.5 \times 2 = 5\text{A}$ 。

(5) 諧振時 $I_L = QI_0 = 2.5 \times 2 = 5\text{A}$ 。

(6) 諧振時電感與電容功率互相抵銷 $P = I_0^2 R$ 。

$$P = I_0^2 R = (20)^2 \times 50 = 200\text{W}$$

(7) 以上計算的程式如下：

```

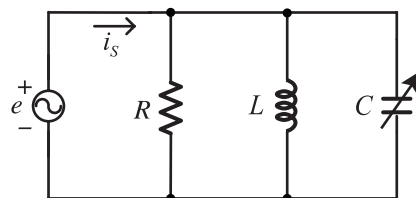
import math as ma;pi=ma.pi;print("pi=",pi)
u=0.000001;m=0.001;k=1000
V=100;R=50;L=40*m;C=100*u
f0=1/(2*pi*ma.sqrt(L*C));print("f0=",f0)#79.5
I0=V/R;print("I0=",I0)#2
Q=R*ma.sqrt(C/L);print("Q=",Q)#2.5
IC=Q*I0;print("IC=",IC)#5
IL=Q*I0;print("IL=",IL)#5
P=I0*I0*R;print("P=",P)#200

```

自我練習

1. 如右圖所示之電路， $e(t) = 100\sin(377t)$ V，調整電容 C 使電路產生諧振，若電阻 $R = 10\Omega$ ，則電流 i_s 為何？ 統測 103

- (A) $100\sin(377t)$ A
 (B) $10\sin(377t - 90^\circ)$ A
 (C) $10\sin(377t)$ A
 (D) 0 A



2. 有一 LC 並聯電路，若電源電壓 $V = 100$ V、 $C = 40\mu\text{F}$ ，當電源角頻率為 5000 rad/s 時電路諧振，則下列敘述何者正確？ 統測 105

- (A) 電感 $L = 10\text{mH}$ ，諧振時電源電流為零
 (B) 電感 $L = 1\text{mH}$ ，諧振時電源電流為零
 (C) 電感 $L = 10\text{mH}$ ，諧振時電源電流為無限大
 (D) 電感 $L = 1\text{mH}$ ，諧振時電源電流為無限大

11-3 串並聯諧振電路

前面所討論的電感器 L 及電容器 C ，皆視為零電阻之理想純電感器及理想純電容器。但實際之電感器是由導線繞成的線圈，其線圈導線本身是有電阻值存在，因此實際的電感器可視為由一電阻 R 與純電感 L 相串聯之等效電路，如圖 11-3a 所示；而實際之電容器是由極板及引線所構成，其存在的電阻值很小而可以忽略，因此實際的電容器可視為零電阻之理想電容器，如圖 11-3b 所示。此一觀念，在 9-1 節的純電容交流電路也證實，純電容交流電路，電流可超前電壓 90° ；但純電感交流電路裡，電流無法落後電壓 90° ，表示電感的線圈一定有電阻。

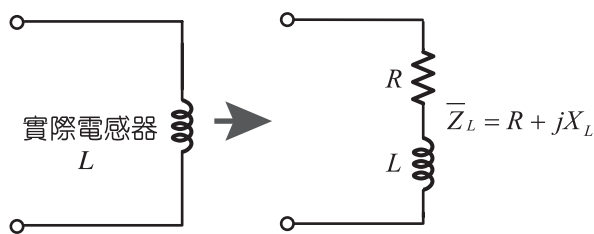


圖 11-3a

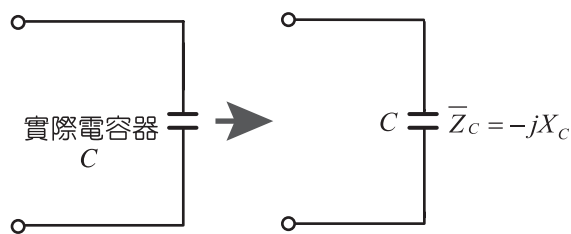


圖 11-3b

所以，我們前面所討論過的 LC 並聯交流電路如圖 11-3c，其實際的等效電路則形成如圖 11-3d 所示的 RLC 串並聯交流電路。

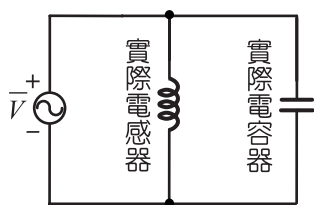


圖 11-3c

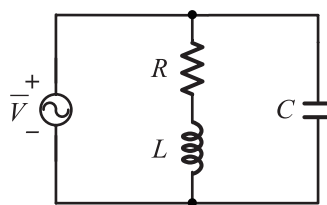


圖 11-3d

依據 9-4 節的 R 、 L 串聯轉 R 、 L 並聯公式 9-4a 與 9-4b，圖 11-3d 可以轉為圖 11-3e。圖 11-3e 的 R_L 與 X_L 分別如下：

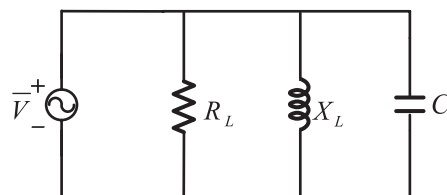


圖 11-3e

$$R_L = \frac{R^2 + (\omega L)^2}{R} \quad (\text{歐姆}, \Omega)$$

(公式 11-3a)

$$X_L = \frac{R^2 + (\omega L)^2}{\omega L} \quad (\text{歐姆}, \Omega)$$

(公式11-3b)

圖 11-3e 為標準 RLC 並聯電路，根據 11-2 節的 RLC 並聯諧振條件，諧振時

$$X_L = X_C$$

諧振時，假設角速度 ω 為 ω_0 ，將 ω_0 代入 X_L 與 X_C ，得到

$$\frac{R^2 + (\omega_0 L)^2}{\omega_0 L} = \frac{1}{\omega_0 C}$$

整理，得到

$$R^2 + (\omega_0 L)^2 = \frac{L}{C}, \text{ 將 } R^2 \text{ 往右移，得到：}$$

$$\Rightarrow (\omega_0 L)^2 = \frac{L}{C} - R^2, \text{ 等號兩邊同時除以 } L^2, \text{ 得到：}$$

$$\Rightarrow \omega_0^2 = \frac{1}{LC} - \frac{R^2}{L^2}, \text{ 將 } \frac{1}{LC} \text{ 提出，得到：}$$

$$\omega_0^2 \Rightarrow \frac{1}{LC} (1 - R^2 \frac{C}{L}), \text{ 兩邊同時開根號，且僅取正，得到：}$$

$$\Rightarrow \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \sqrt{1 - R^2 \frac{C}{L}}$$

$$\Rightarrow f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \sqrt{1 - R^2 \frac{C}{L}} \quad (\text{赫茲}, \text{Hz})$$

(公式11-3c)

品質因數

依據 RLC 並聯的品質因數公式 11-2c：

$$Q = \frac{R_L}{X_L}, \text{ } R_L \text{ 與 } X_L \text{ 分別以公式 11-3a、11-3b 代入，得到：}$$

$$Q = \frac{\frac{R^2 + (\omega_0 L)^2}{R}}{\frac{R^2 + (\omega_0 L)^2}{\omega_0 L}} = \frac{\omega_0 L}{R} = 2\pi f_0 \frac{L}{R}$$

(公式11-3d)

諧振阻抗

根據 RLC 並聯諧振時，電感與電容阻抗互相抵銷，所以總阻抗僅剩 R_L ：

$\bar{Z} = R_L$ ， R_L 以公式 11-3a 代入：

$$\bar{Z} = \frac{R^2 + (\omega_0 L)^2}{R} = \frac{R^2 + (QR)^2}{R} = R(1 + Q^2)$$

(公式 11-3e)

(以上 $\omega_0 L = QR$ ，請看公式 11-3d 的推導。)

範例 11-3a

如右圖所示，若正弦波交流電壓源 $\bar{V} = 100\text{V}$ ， $R = 8\Omega$ ， $L = 1\text{mH}$ ， $C = 10\mu\text{F}$ ，則諧振時之 $\bar{I}$ 為何？

統測 107

- (A) 6A (B) 8A
(C) 10A (D) 12A

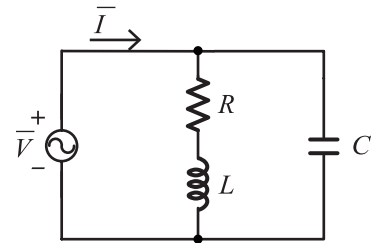


圖 (1)

解

- (1) 將圖 (1) 的 R 、 L 串聯轉為 R 、 L 並聯等效電路，如圖 (2)，此即為標準 RLC 並聯諧振電路，這樣就可以使用 RLC 並聯諧振公式。

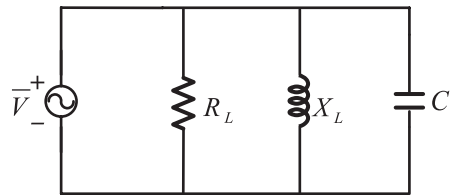


圖 (2)

- (2) 根據公式 9-4a 與 9-4b。

$$R_L = \frac{R^2 + L^2}{R}, \quad X_L = \frac{R^2 + L^2}{L} = \frac{R^2 + (\omega L)^2}{\omega L}$$

- (3) 諧振時 $X_L = X_C$ ，假設諧振時角速度 ω 為 ω_0 ，代入 X_L 與 X_C ，得到。

$$\frac{R^2 + (\omega_0 L)^2}{\omega_0 L} = \frac{1}{\omega_0 C}$$

整理，得到

$$\begin{aligned} \omega_0 &= \frac{1}{\sqrt{LC}} \sqrt{1 - R^2 \frac{C}{L}} = \frac{1}{\sqrt{1\text{m} \times 10\mu}} \sqrt{1 - 8^2 \times \frac{10\mu}{1\text{m}}} \\ &= 6000 \text{ rad/s} \end{aligned}$$

(4) 依據公式 11-3d， $Q = \frac{R_L}{X_L} = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{6000 \times 1m}{8} = 0.75$ 。

(5) 依據公式 11-3e， $\bar{Z} = R_L = R(1 + Q^2) = 8 \times (1 + 0.75^2) = 12.5\Omega$ 。

(6) 依據歐姆定律， $I = \frac{V}{Z} = \frac{100}{12.5} = 8A$ 。

(7) 以上計算的 Python 程式如下：

```
import math as ma
u=0.000001;m=0.001;k=1000
V=100;R=8;L=1*m;C=10*u
w0=1/(ma.sqrt(L*C))*ma.sqrt(1-(R*R*C)/L)
print("w0=",w0)#6000
Q=w0*L/R;print("Q=",Q)#0.75
Z=R*(1+Q*Q);print("Z=",Z)#12.5
I=V/Z;print("I=",I)#8
```

補充說明

1. 生活上的諧振：(1) 盪鞦韆，盪鞦韆時，只要依照鞦韆同樣的頻率，使用身體重心的改變，就可以維持鞦韆的擺盪，但是若外力過大，大於摩擦力時，擺盪一定超過 360 度，就會有危險。(2) 吊橋的擺盪也是同樣道理，前幾年，在印度有 3 ~ 5 個屁孩，故意在吊橋上同時搖動，結果吊橋擺動幅度越來越大，吊橋當然就斷掉，造成多人喪命。

11-4 本章內容摘要

1. 串聯諧振的特性：

$$(1) \text{ 諧振頻率 } f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

(2) 諧振時，電流達最大 $I_0 = \frac{V}{R}$ ， R 若等於 0，則為 LC 串聯諧振，電流無限大。

$$(3) \text{ 品質因數 } Q = \frac{I_0^2 X_L}{I_0^2 R} = \frac{X_L}{R} = \frac{X_C}{R} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} \quad (\text{串聯電流相同，所以功率取 } I_0^2 X_L)$$

(4) 電感端電壓 $V_L = QV$ (V 為電源電壓)

(5) 電容端電壓 $V_C = QV$ (V 為電源電壓)

$$(6) \text{ 頻帶寬度 } BW = \frac{f_0}{Q} \quad (7) \text{ 上下截止電流 } I_1, I_2 = \frac{I_0}{\sqrt{2}}$$

$$(8) \text{ 下截止頻率 } f_1 = f_0 - \frac{BW}{2} \quad (9) \text{ 上截止頻率 } f_2 = f_0 + \frac{BW}{2}$$

2. 並聯諧振的特性：

$$(1) \text{ 諧振頻率 } f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \quad (\text{與串聯相同})$$

(2) 諧振時，電流達最小 $I_0 = \frac{V}{R}$ (串聯是達最大)

$$(3) \text{ 品質因數 } Q = \frac{\frac{X_L}{V^2}}{R} = \frac{R}{X_L} = \frac{R}{X_C} = R \sqrt{\frac{C}{L}} \quad (\text{串聯是 } Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}})$$

(並聯電壓相同，所以功率取 $\frac{V^2}{X_L}$ ，品質因數為串聯的倒數)

(4) 電感電流 $I_L = QI_0$ (串聯是 $V_L = QV$)

(5) 電容電流 $I_C = QI_0$ (串聯是 $V_C = QV$)

$$(6) \text{ 頻帶寬度 } BW = \frac{f_0}{Q} \quad (\text{與串聯相同})$$

$$(7) \text{ 上下截止電流 } I_1, I_2 = \sqrt{2}I_0 \quad (\text{串聯是 } I_1, I_2 = \frac{I_0}{\sqrt{2}})$$

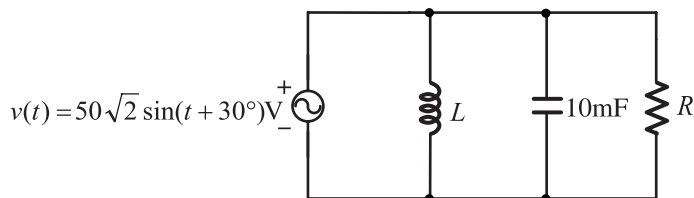
$$(8) \text{ 下截止頻率 } f_1 = f_0 - \frac{BW}{2} \quad (\text{與串聯相同})$$

$$(9) \text{ 上截止頻率 } f_2 = f_0 + \frac{BW}{2} \quad (\text{與串聯相同})$$

11-5 課後習題

選擇題

1. 外接電流源 $\bar{I}_s = 4\angle 0^\circ$ A 的 RLC 並聯電路中，電阻 $R=10\Omega$ ，電感 $L=5\text{mH}$ ，電容 $C=10\mu\text{F}$ 。當發生諧振時，該電路平均消耗功率約為多少瓦特？ 統測 104
(A) 80 (B) $\frac{160}{\sqrt{2}}$ (C) 160 (D) $160\sqrt{2}$
2. 有一 RLC 並聯電路，並接於 $v(t)=10\sin(1000t)\text{V}$ 之電源，已知 $R=5\Omega$ ， $C=20\mu\text{F}$ ，欲使電源電流得到最小電流值，則電感 L 應為何？ 統測 108
(A) 5mH (B) 0.05H (C) 0.5H (D) 0.8H
3. 如下圖所示之 RLC 並聯電路，若電路之功率因數為 1 及消耗的平均功率為 25W ，則電路的品質因數為何？ 統測 109



- (A) 5 (B) 2 (C) 1.414 (D) 1
4. 有關交流 RLC 並聯電路之敘述，下列何者正確？ 統測 110
(A) 電路發生諧振時，若品質因數為 Q ，則流經電阻的電流將被放大 Q 倍
(B) 當電源頻率小於諧振頻率時，電路呈現電容性
(C) 當電源頻率大於諧振頻率時，電源電流隨頻率增加而減少
(D) 當電路發生諧振時，電路總阻抗為最大
 5. 有關 RLC 並聯諧振電路之敘述，下列何者正確？ 統測 112
(A) 諧振時總電流最大
(B) 諧振時品質因數愈大，頻帶寬度愈寬
(C) 諧振時總導納最大
(D) 諧振時電感與電容之虛功率大小相等
 6. 有一 RLC 並聯電路， $R=200\Omega$ 、 $L=1\text{mH}$ ，諧振時若頻帶寬度 (bandwidth) $\text{BW} = (250/\pi)\text{Hz}$ ，則下列敘述何者正確？ 統測 113
(A) 諧振頻率 $f_0 = (500/\pi)\text{Hz}$
(B) 品質因數 $Q=20$

(C) 上截止頻率 $f_2 = 1592\text{Hz}$

(D) 電容 $C = 100\mu\text{F}$

7. RLC 串聯電路，當電路發生諧振時，下列敘述何者正確？ 統測 108

(A) 電路之消耗功率 為最小

(B) 若 L / C 為定值時，當電路電阻愈大，則頻率響應愈好，選擇性愈佳

(C) 若電路電阻為定值時，當 L / C 之比值愈大，則電感器元件之端電壓會愈大

(D) 當電路之工作頻率大於諧振頻率時電路呈電容性

8. 有一 RLC 串聯諧振電路，接於交流電源，若此電路的諧振頻率為 1kHz ，頻帶寬度為 50Hz ，當電路於截止頻率時之平均消耗功率為 500W ，則電路在諧振時之平均消耗功率為何？ 統測 108

(A) 250W

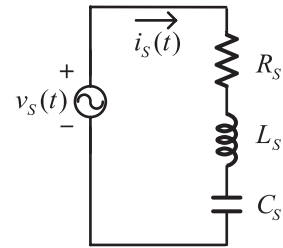
(B) 500W

(C) 1000W

(D) 2000W

- ▲ 閱讀下文，回答第 9 -10 題

某串聯諧振電路如右圖所示，已知品質因數為 5，電路的諧振角頻率 $\omega_o = 2000\text{ rad/s}$ ， $R_S = 4\ \Omega$ ，電源電壓 $v_s(t) = 50\sqrt{2}\sin(2000t)\text{ V}$ ，可依品質因數、諧振角頻率及電源電壓，設計電感值、電容值及電容的耐壓。



9. 圖中串聯諧振電路之電感 L_S 及電容 C_S 值，下列何者正確？ 統測 111

(A) $L_S = 5\text{mH}$ ， $C_S = 50\mu\text{F}$

(B) $L_S = 10\text{mH}$ ， $C_S = 25\mu\text{F}$

(C) $L_S = 25\text{mH}$ ， $C_S = 10\mu\text{F}$

(D) $L_S = 50\text{mH}$ ， $C_S = 5\mu\text{F}$

10. 圖中串聯諧振電路穩態時電容 C_S 端電壓有效值為何？ 統測 111

(A) 50V (B) 150V (C) 250V (D) 300V

11. 有一 RLC 並聯電路，接於 $v(t) = 300\sin(2000t)\text{V}$ 之電源，已知 $R = 500\Omega$ ， $L = 20\text{ mH}$ ，當電路電流有效值為最大時，則電容 C 應為何？ 統測 112

(A) $6.5\mu\text{F}$ (B) $10\mu\text{F}$ (C) $12.5\mu\text{F}$ (D) $15.5\mu\text{F}$

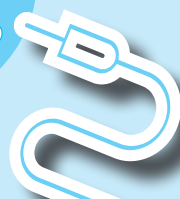
12. 有關 RLC 串聯諧振電路現象，下列何者錯誤？
- (A) 諧振時電路阻抗最大
 - (B) 諧振時平均功率最大
 - (C) 電容電壓可能超過電源電壓
 - (D) 諧振時功率因數為 1
13. 下列有關理想的 R 、 L 、 C 三元件串聯電路之敘述，何者有誤？
- (A) 發生諧振現象時，電路的阻抗值最小
 - (B) 發生諧振現象之頻率與電阻 R 無關
 - (C) 電阻 R 越大，品質因數越高
 - (D) 不一定為低通濾波器

是非題

1. RLC 串聯諧振時，電流達最大。
2. RLC 並聯諧振時，電流達最小。
3. RLC 串聯與並聯的諧振頻率都是 $f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$ 。
4. 串聯諧振的頻寬 (BW)，電流是取 0.707 倍的電流所對應的頻率範圍。
5. 並聯諧振的頻寬 (BW)，電流是取 1.414 倍的電流所對應的頻率範圍。

素養是非題

1. 盪鞦韆時，只要施力頻率與擺動頻率相同，就可以維持擺動，力量若過大，鞦韆也會翻覆，此現象與本章的諧振相同。
2. 時鐘的鐘擺擺動，只要施力頻率與擺動頻率相同，就可以維持擺動，此現象與本章的諧振原理相同。
3. 吊橋若以相同的頻率，持續用力搖晃，吊橋必定斷掉。
4. 兩支相同震盪頻率的音叉靠近放置，但並沒有接觸，當敲打其中一支，另一支也會跟著震盪發出聲音。
5. 收音機的接收天線與電台的發射天線，雖然沒有接觸，但只要頻率調成相同，收音機就可以接收發射電台的信號。



交流電源

學習大綱

- 12-1 單相電源
- 12-2 三相電源
- 12-3 電源使用安全
- 12-4 本章內容摘要
- 12-5 課後習題

學習目標

1. 能瞭解單相電源的接線方式。
2. 能瞭解三相電源的線電壓、相電壓等計算方式。
3. 能瞭解電源使用安全

常見的交流電源有單相電源與三相電源，本章 12-1 與 12-2 節依序介紹單相電源與三相電源，12-3 節則介紹電源使用安全。

12-1 單相電源

單相 (single-phase) 電源常用於一般家庭、商店與辦公場所，分為單相二線式及單相三線式兩種供電方式，分述如下：

單相二線式

單相二線式 (single-phase two-wire system, 簡稱 $1\phi 2W$)，其中單相是指該電源在同一時間內只提供一個固定波幅及頻率的正弦波電壓；至於二線是指使用兩條電線供電，如圖 12-1a 所示。以示波器觀察，結果如圖 12-1b。

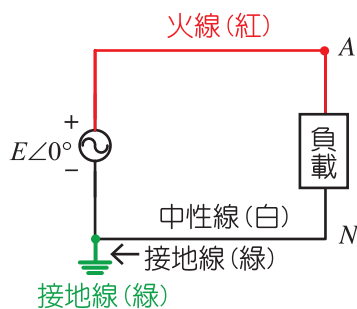


圖 12-1a 單相二線式

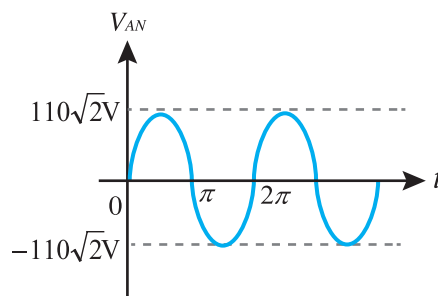


圖 12-1b 單相兩線式波形

$1\phi 2W$ 有兩條外接線，一條為火線，一條為中性線，說明如下：

- (1) 火線：火線供電電壓有效值為 110V，以驗電筆碰觸時燈會亮起。當人體一端（例如：手）碰觸到火線，另一端（例如：腳）碰觸到大地時，電流將會從火線經由人體返回大地形成迴路，人體因而有觸電的感覺。火線通常採用紅色或黑色導線。
- (2) 中性線：中性線除了連接回電力公司，也接至大地（通常連接住家的牆壁鋼筋），其電位為 0V，以驗電筆碰觸時燈不會亮，人體碰觸到中性線時不會有觸電的感覺。中性線一般採用白色或灰色導線，連接到接地極的接地線則必須採用綠色接地線。

單相三線式

單相三線式 (single-phase three-wiresystem, 簡稱 $1\phi 3W$)，其中三線是指該單相電源使用三條電線供電，如圖 12-1c 所示，示波器波形如圖 12-1d，藍色波形是 V_{AN} 與 V_{NB} ，紅色波形是 V_{AB} 。

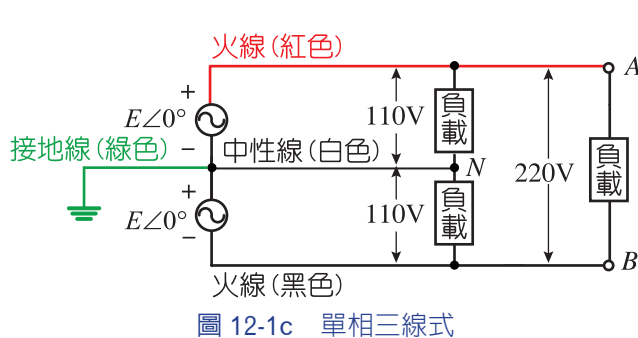


圖 12-1c 單相三線式

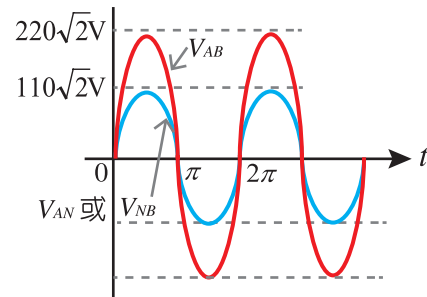


圖 12-1d 單相三線式波形

$1\phi 3W$ 提供兩組 110V 電源及一組 220V 電源，說明如下：

- (1) 110V：火線與中性線之間電壓 $V_{AN}=V_{NB}=110V$ ，供應一般燈具及小型電器的用電。
- (2) 220V：兩條火線之間 $V_{AB}=220V$ ，供應較大功率電器的用電，例如冷氣機，因為電壓提升，當功率相同時，可以降低電流的使用量。
- (3) $1\phi 3W$ 兩端的負載平衡時，中性線沒有電流流過。
- (4) $1\phi 3W$ 中性線不得設過載斷路器，否則一旦發生斷路，當負載不平衡時，將會使功率較低的一端，因為分配到的電壓過高，而有燒毀之虞（功率低，電阻大，分配的電壓就大）。

單相三線式的優點如下：

1. 當使用相同的導線，在相同的距離內傳送相同的功率時，就線路電壓降（ V ）而言： $1\phi 3W$ 只有 $1\phi 2W$ 的一半。
2. 當使用相同的導線，在相同的距離內傳送相同的功率時，就電力損失（ P ）而言： $1\phi 3W$ 只有 $1\phi 2W$ 的 $1/4$ 。

以上兩點證明如下：圖 12-1e 是使用 $1\phi 2W$ 驅動兩個負載 R_L ，圖 12-1f 是使用 $1\phi 3W$ ，也是驅動兩個負載 R_L ，現在內阻 r 相同，表示距離相同，兩個負載也相同。

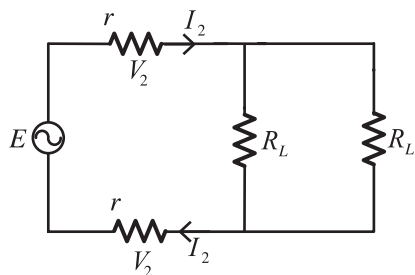


圖 12-1e

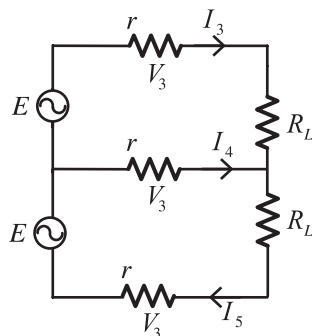


圖 12-1f

因為 r 遠小於 R_L ，所以 $I_2 = \frac{2E}{R_L}$ $I_3 = I_5 = \frac{E}{R_L}$ $I_4 = 0$ (負載平衡)

單相二線式的線路總壓降 $\Delta V_2 = 2V_2 = 2I_2 r = 2 \frac{2E}{R_L} r = \frac{4E}{R_L} \cdot r$

單相三線式的線路總壓降 $\Delta V_3 = 2V_3 = 2I_3 r = \frac{2E}{R_L} \cdot r = \frac{1}{2} \Delta V_2$ ，所以單相三線式總壓降值為單相二線式總壓降的一半。

單相二線式的電力總損失 $\Delta P_2 = 2I_2^2 r = 2 \left(\frac{2E}{R_L} \right)^2 \times r = 8 \frac{E^2}{R_L^2} \cdot r$

單相三線式的電力總損失 $\Delta P_3 = 2I_3^2 r = 2 \frac{E^2}{R_L^2} \cdot r = \frac{1}{4} \Delta P_2$ ，所以單相三線式電力總損失僅為單相二線式總損失的 $1/4$ 。

範例12-1a

如右圖所示之電路，若兩電阻負載的功率分別為 440 W 及 220 W，則電流 $\bar{I}_N$ 為何？

統測 103

- (A) $1\angle 180^\circ$ A (B) $2\angle 0^\circ$ A
(C) $3\angle 180^\circ$ A (D) $6\angle 0^\circ$ A

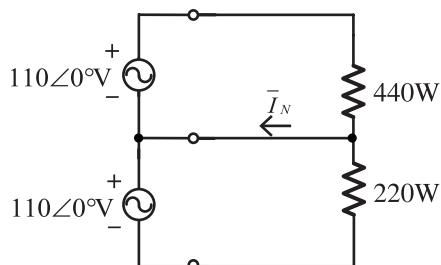


圖 (1)

解

$$(1) \text{ 由 } P = \frac{V^2}{R} \Rightarrow 440 = \frac{(110)^2}{R_A} \Rightarrow R_A = 27.5\Omega$$

$$220 = \frac{(110)^2}{R_B} \Rightarrow R_B = 55\Omega$$

(2) 標注電阻值 R_A 、 R_B 、 V_A 、 V_B 、 I_A 、 I_B 、 V_0 如圖 (2)

(3) 使用節點 V_0 ，由 KCL 得到 $I_A = I_N + I_B$

$$\frac{V_A - V_0}{R_A} = I_N + \frac{V_0 - V_B}{R_B}$$

$$\frac{110 - 0}{27.5} = I_N + \frac{0 - (-110)}{55}$$

$$I_N = 2A$$

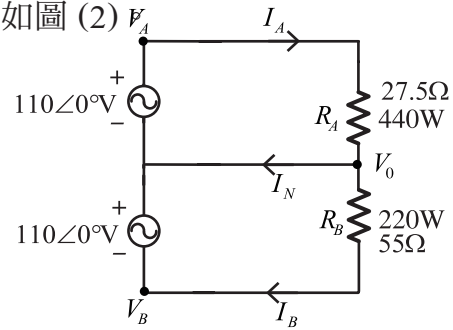


圖 (2)

自我練習

1. 同範例 12-1a，若兩個負載都是 220W，求 I_N ？

範例12-1b

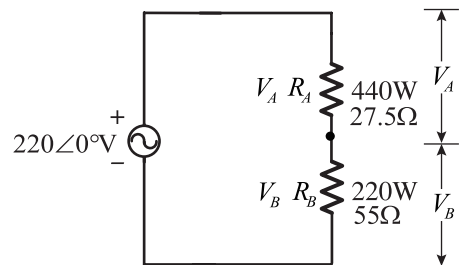
同範例 12-1a，若中性線斷掉，則兩個負載承受的分壓是多少？其風險是什麼？

解

(1) 若中性線斷掉，整個系統如右圖。

$$(2) V_B = \frac{220}{R_A + R_B} \cdot R_B = \frac{220}{27.5 + 55} \times 55 \div 147V$$

$$(3) V_A = \frac{220}{R_A + R_B} \cdot R_A = \frac{220}{27.5 + 55} \times 27.5 \div 73V$$

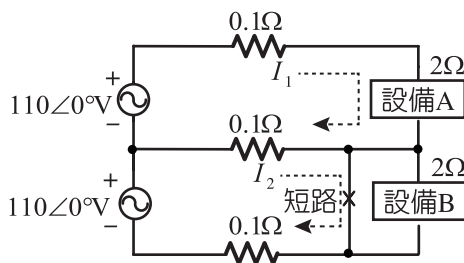


(4) 由 $V_B \div 147V$ 與 $V_A \div 73V$ 得知，負載不平衡，且中性線斷掉，功率小者的分壓較大，若其耐壓不足，就容易燒毀。

自我練習

1. 如右圖所示單相三線電路，設備 A 及 B 為純電阻性負載，電阻值皆為 2Ω ，於負載 B 端發生短路故障，短路電流 I_2 之值約為何？ 統測 109

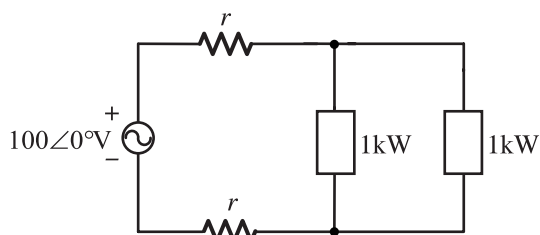
(A) 660.3 A (B) 588.4 A
(C) 384.7 A (D) 76.7 A



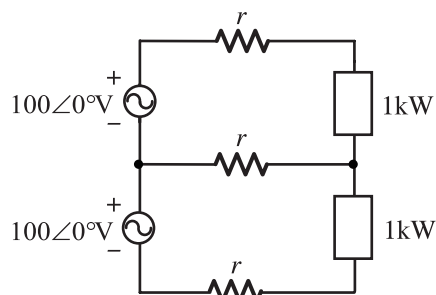
2. 如下圖所示之 $1\phi 2W$ 與 $1\phi 3W$ 供電系統，其中每一配電線路的等效電阻為 r ，單一負載皆為 $1kW$ 。若 $1\phi 2W$ 系統供電之配電線路損失為 P_{2W} ， $1\phi 3W$ 系統供電之配電線路損失為 P_{3W} ，則下列敘述何者正確？

統測 104

(A) $P_{3W} = 4 P_{2W}$ (B) $P_{3W} = 3 P_{2W}$
(C) $P_{3W} = 0.5 P_{2W}$ (D) $P_{3W} = 0.25 P_{2W}$



(a) $1\phi 2W$ 供電



(b) $1\phi 3W$ 供電

§12-2 三相電源

一般大型的電力系統如大功率電動馬達的運轉，通常需要功率較穩定的電源供應，單相系統所產生的脈動交流功率，不適合大型電力系統的需求。如果改用多相系統的電源，則可以改善功率不穩的情形；而且，一般大型的發電系統多採用三相方式輸出，再依個別需要，經變壓器轉換成為單相二線、三線式與三相電源（three-phase sources），然後分別接至家庭與工廠，如圖 12-2a 所示：

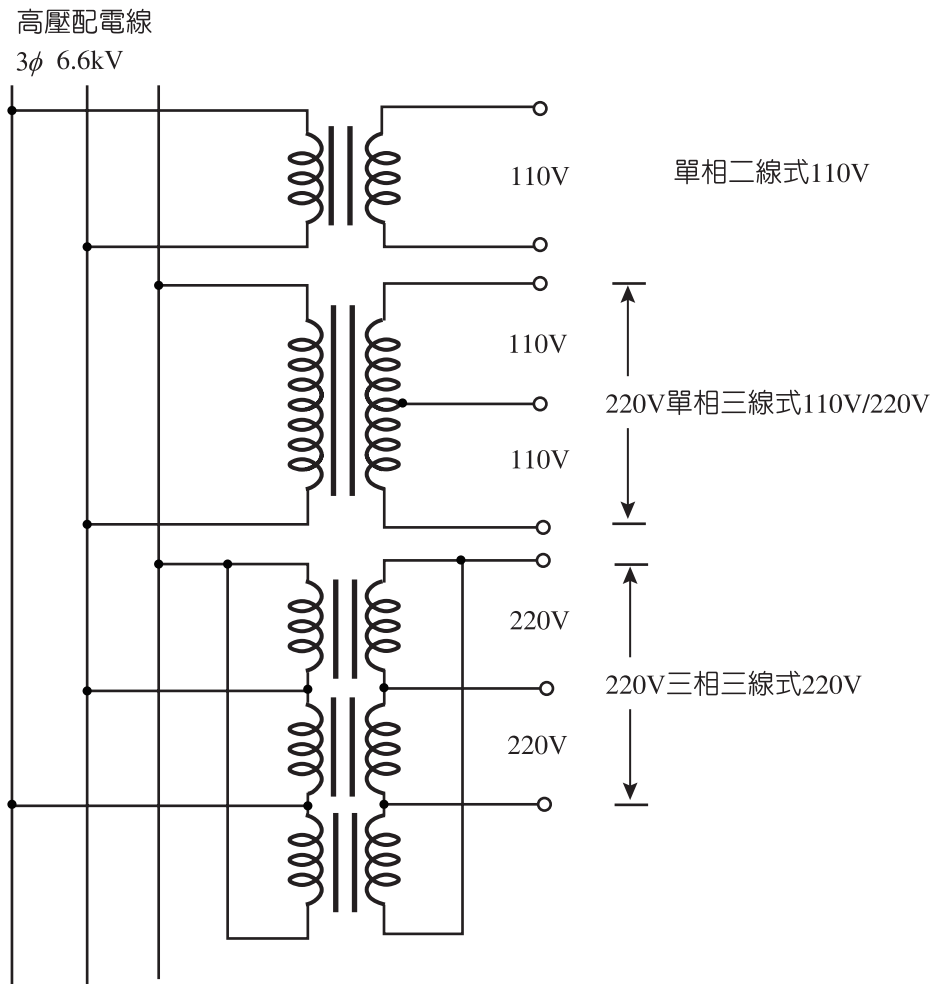


圖 12-2a 三相交流與單相交流電源系統

在 1-2 節中曾簡單說明單相交流發電機的原理：當一線圈在磁場中旋轉時，可感應生成一正弦波形的電壓。而三相電源系統的發電機，也是利用同樣的工作原理，但卻是同時放置三組相同的線圈，且各線圈相互間隔 120° 的角度，如圖 12-2b 所示。

當這三組線圈在磁場中以相同轉速旋轉時，便可使發電機輸出三組正弦波電壓，而三組電壓間各有 120° 的相位差，各相位電壓的波形如圖 12-2c 所示。

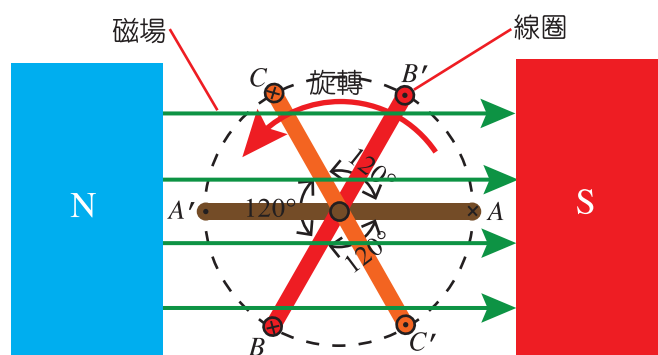


圖 12-2b 三相發電機示意圖

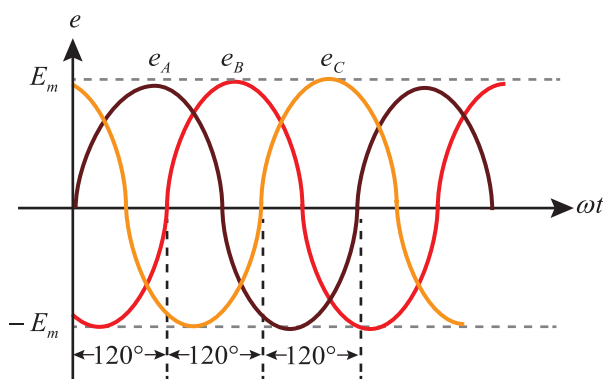


圖 12-2c 三相電壓之瞬間值

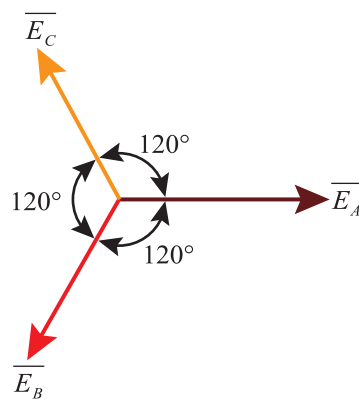


圖 12-2d 相量圖

三相系統的電壓

由圖 12-2c 可知，在三相發電機所產生的電壓波形中，電壓 e_B 滯後電壓 e_A 相角 120° ，電壓 e_C 滯後電壓 e_B 相角 120° ，電壓 e_A 滯後電壓 e_C 相角 120° 。因三組線圈的圈數及轉速相同，使得三個相位的電壓最大值同為 E_m ；若以電壓 e_A 的相位為基準，則 A、B、C 三個相位的瞬間電壓值可表示為：

$$\begin{aligned}
e_A(t) &= E_m \sin \omega t = \sqrt{2}E \sin \omega t \\
e_B(t) &= E_m \sin(\omega t - 120^\circ) = \sqrt{2}E \sin(\omega t - 120^\circ) \\
e_C(t) &= E_m \sin(\omega t - 240^\circ) = \sqrt{2}E \sin(\omega t - 240^\circ) \\
&= E_m \sin(\omega t + 120^\circ) = \sqrt{2}E \sin(\omega t + 120^\circ)
\end{aligned}$$

以相量式表示爲：

$$\begin{aligned}
\overline{E}_A &= E \angle 0^\circ \\
\overline{E}_B &= E \angle -120^\circ \\
\overline{E}_C &= E \angle -240^\circ = E \angle 120^\circ
\end{aligned}$$

其相量圖如圖 12-2d。歸納上述三相系統的描述，三相電源具有下列特性：

- 三相電源的三組輸出電壓大小相等。
- 三相電源之三組電壓間的相位差各爲 120° 。
- 三相電源之三組電壓在任何瞬間的電壓和爲零。本項證明如下：

$$\begin{aligned}
&\text{因爲 } \overline{E}_A + \overline{E}_B + \overline{E}_C = E \angle 0^\circ + E \angle -120^\circ + E \angle 120^\circ \\
&= E(\cos 0^\circ + j \sin 0^\circ) \\
&\quad + E(\cos(-120^\circ) + j \sin(-120^\circ)) \\
&\quad + E(\cos 120^\circ + j \sin(120^\circ)) \\
&= E + E\left(-\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + E\left(-\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 0
\end{aligned}$$

相序

前面的單相二線式與單相三線式電源接線，只要分火線 A、火線 B 與中性線即可。三相發電機則要強調各線的感應電動勢達到最大值的順序，所以分爲正向序與逆相序，這樣接馬達時才能順利運轉，分別說明如下：

⚡ 正相序

三相發電機轉子逆時針旋轉時，各相繞組通過某一固定點 (P) 的順序，依序爲 $A \rightarrow B \rightarrow C$ 者，稱之爲正相序 (positive sequence)，如圖 12-

2e 所示；由於是圓的旋轉，因此 $B \rightarrow C \rightarrow A$ 或 $C \rightarrow A \rightarrow B$ 都是屬於正相序。另外以波形來看，正相序表示各相感應電動勢到達最大值的順序為 $e_{AA'} \rightarrow e_{BB'} \rightarrow e_{CC'}$ ，如圖 12-2f 所示。

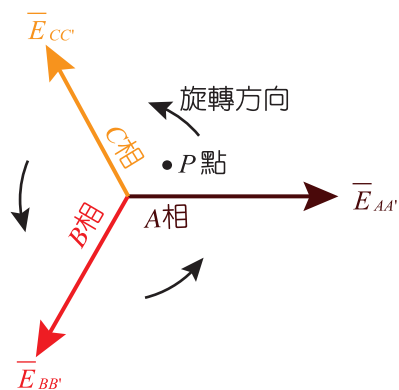


圖 12-2e 正向序相量圖

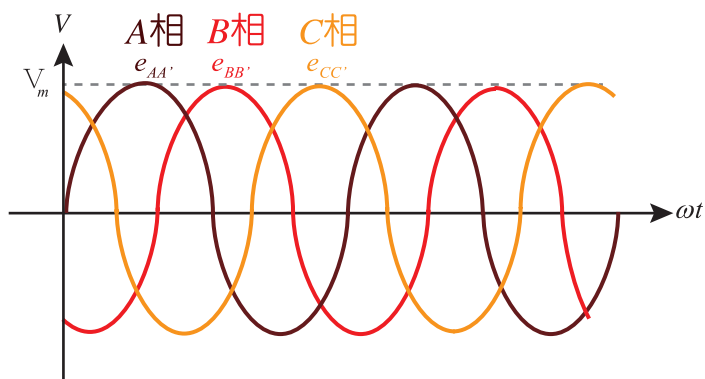


圖 12-2f 正向序波形圖

⚡ 逆相序或負相序

三相發電機轉子逆時針旋轉時，各相繞組通過某一固定點(P)的順序，依序為 $A \rightarrow C \rightarrow B$ 者，稱之為**負相序或逆相序** (negative sequence)，如圖 12-2g 所示。

若以波形來看，逆相序表示各相感應電動勢到達最大值的順序為 $e_{AA'} \rightarrow e_{CC'} \rightarrow e_{BB'}$ ，如圖 12-2h 所示。

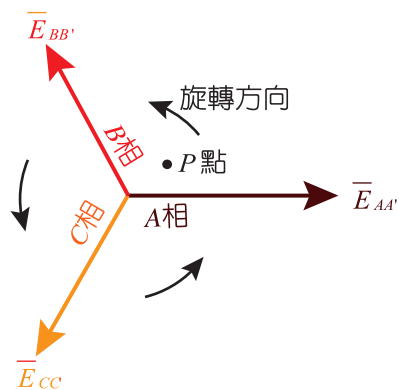


圖 12-2g 逆向序相量圖

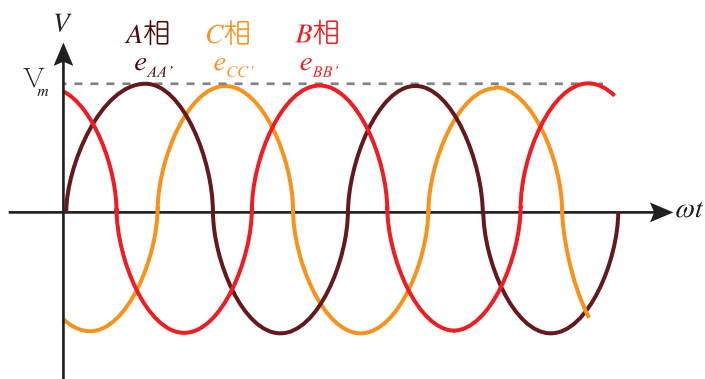


圖 12-2h 逆向序波形圖

三相發電機的連接

如圖 12-2b 所述，三相發電機的線圈有三個繞組，分別是 AA' 、 BB' 與 CC' ，也定義這三個繞組的名稱，三個繞組的排列若是 $A-B-C$ 則為正向序，排列若是 $A-C-B$ 則為逆相序。接下來要談這三個繞組的連接方式。此三個繞組的連接方式，有 Y 形及 Δ 形兩種接法，其接線方式不同，特性也各有不同，分別說明如下。

☞ Y 形連接（三相發電機）

將三個繞組的線尾（ A' 、 B' 、 C' ）連接在一起，稱為中性點（neutral point） N ，另一端的三個線頭（ A 、 B 、 C ）分別接到負載，這種接法外形像一個倒「Y」字，因此稱為 Y 形連接，Y 形連接適用於三相四線（ $3\phi 4W$ ）式供電系統，如圖 12-2i 所示。

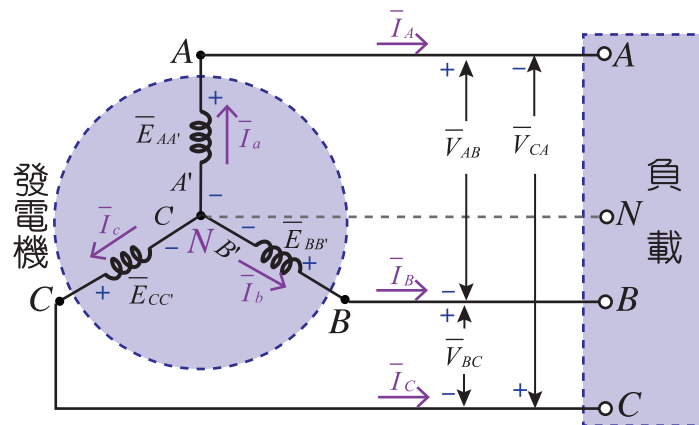


圖 12-2i 三相發電機 Y 形連接

☞ 相電流（phase current, $\bar{I}_P$ ）

以上流經各繞組的電流，如圖中的 $\bar{I}_a$ 、 $\bar{I}_b$ 、 $\bar{I}_c$ ，稱為相電流（ $\bar{I}_P$ ），各相電流之間的相位差為 120° 。

☞ 線電流（line current, $\bar{I}_L$ ）

流經外部線路的電流；如圖中的 $\bar{I}_A$ 、 $\bar{I}_B$ 、 $\bar{I}_C$ ，稱為線電流（ $\bar{I}_L$ ），各線電流之間的相位差也是 120° 。由 KCL 可知，Y 形連接的線電流等於相電流。

$$\bar{I}_L = \bar{I}_P$$

⚡ 相電壓 (phase voltage, $\bar{V}_P$)

各繞組兩端的電壓，如圖中的 $\bar{E}_{AA'}$ 、 $\bar{E}_{BB'}$ 、 $\bar{E}_{CC'}$ ，稱為相電壓 ($\bar{V}_P$)。

⚡ 線電壓 (line voltage, $\bar{V}_L$)

外部線路中，線與線之間的電壓，如圖中的 $\bar{V}_{AB}$ 、 $\bar{V}_{BC}$ 、 $\bar{V}_{CA}$ ，稱為線電壓 ($\bar{V}_L$)。Y 形連接電路的線電壓為相電壓的 $\sqrt{3}$ 倍，即

$$\bar{V}_L = \sqrt{3}\bar{V}_P$$

先以正相序為例，證明以上關係。正向序各相 ($\bar{E}_{AA'}$ 、 $\bar{E}_{BB'}$ 、 $\bar{E}_{CC'}$) 電壓的相量式為：

$$\bar{E}_{AA'} = V_P \angle 0^\circ, \bar{E}_{BB'} = V_P \angle -120^\circ, \bar{E}_{CC'} = V_P \angle 120^\circ$$

由圖 12-2i 的 A—N—B 迴路，根據 KVL，線電壓

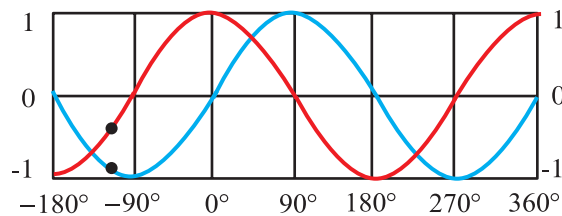
$$\bar{V}_{AB} = \bar{E}_{AA'} + \bar{E}_{B'B}, \text{ 題目給 } \bar{E}_{BB'} = V_P \angle -120^\circ, \text{ 所以以負號修正相量,}$$

$$\bar{E}_{B'B} = -\bar{E}_{BB'}$$

$$= \bar{E}_{AA'} - \bar{E}_{BB'}, \text{ 以相量式表示如下:}$$

$$= V_P \angle 0^\circ - V_P \angle -120^\circ, \text{ 向量要加減, 所以轉為直角座標如下:}$$

$$= V_P(\cos 0^\circ + j \sin 0^\circ) - V_P(\cos(-120^\circ) + j \sin(-120^\circ)) \text{ (圖 12-2j)}$$



藍色: $\sin \theta$

紅色: $\cos \theta$

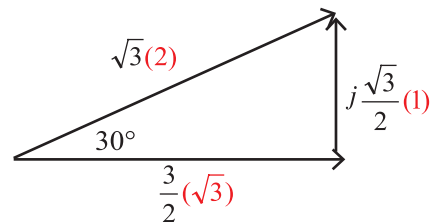
圖 12-2j $\sin \theta$ 與 $\cos \theta$ 函數圖

$$= V_P(1 + j0) - V_P\left(-\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$= V_P\left(\frac{3}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \text{ (如圖 12-2k, 為 } \sqrt{3}:1:2$$

三角形)

$$= \sqrt{3}V_P \angle 30^\circ \text{ V}$$



1: $\sqrt{3}$: 2 直角三角形

圖 12-2k 相量圖

以上兩個極座標相減，再轉回極座標計算，本單元會重複使用，所以寫成 Python 程式，如以下程式 12-2a，此程式於本節後續計算，可重複使用。

```
import math,cmath
#副程式
def aa(ra,si):
    si=si/180*math.pi#度度量轉徑度量
    a=ra*math.cos(si)
    b=ra*math.sin(si)
    z=complex(a,b)#轉為複數
    return z
#主程式
ra=1;asi=0      #角度a在此修改
rb=1;bsi=-120   #角度b在此修改
za=aa(ra,asi)  #轉直角坐標
zb=aa(rb,bsi)
zc=za-zb; #複數減法運算
rc,csi=cmath.polar(zc) #轉極座標
csi=math.degrees(csi) #徑度量轉度度量
print("/C=%4.2f∠%3.1f"%(rc,csi))
```

程式 12-2a 兩個極座標相減，再轉回極座標。

同理可證：

$$\begin{aligned}\bar{V}_{BC} &= \bar{E}_{BB'} + \bar{E}_{C'C} = \bar{E}_{BB'} - \bar{E}_{CC'} \\ &= V_p \angle -120^\circ - V_p \angle 120^\circ = \sqrt{3}V_p \angle -90^\circ \quad (\text{於程式 12-2a，將 asi 修改為 } -120, \\ &\text{bsi 修改為 } 120, \text{ 執行程式，即可算出結果})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{V}_{CA} &= \bar{E}_{CC'} + \bar{E}_{A'A} = \bar{E}_{CC'} - \bar{E}_{AA'} \\ &= V_p \angle 120^\circ - V_p \angle 0^\circ = \sqrt{3}V_p \angle 150^\circ \quad (\text{於程式 12-2a，將 asi 修改為 } 120, \text{ bsi 修} \\ &\text{改為 } 0, \text{ 執行程式，即可算出結果})\end{aligned}$$

以上正向序的相電壓與線電壓相量關係，可以繪製相量圖，如圖 12-21。

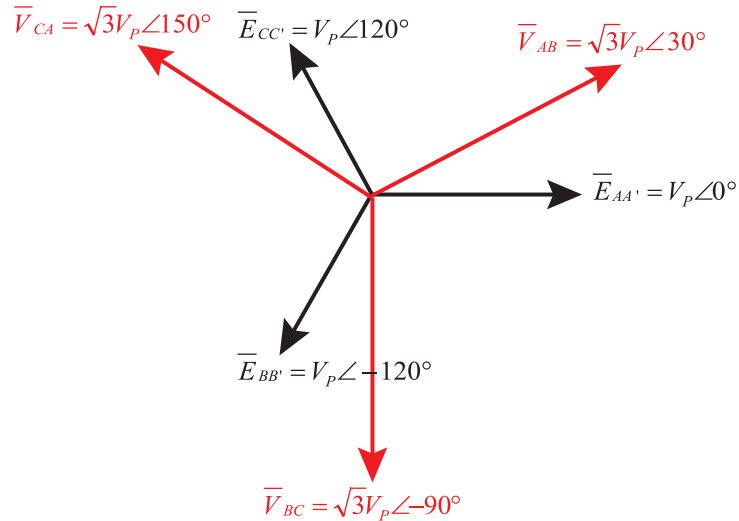


圖 12-21 正向序相電壓與線電壓

以上是正向序，我們已經證明線電壓為相電壓 $\sqrt{3}$ 倍。若是逆向序，逆向序各相電壓的相量式為：

$$\bar{E}_{AA'} = V_p \angle 0^\circ, \bar{E}_{BB'} = V_p \angle 120^\circ, \bar{E}_{CC'} = V_p \angle -120^\circ$$

由圖 12-2i 的 $A-N-B$ 迴路，根據 KVL，線電壓

$$\begin{aligned} \bar{V}_{AB} &= \bar{E}_{AA'} + \bar{E}_{B'B} \quad (\text{以負號修正相量}) \\ &= \bar{E}_{AA'} - \bar{E}_{BB'} \\ &= V_p \angle 0^\circ - V_p \angle 120^\circ \quad (\text{帶入程式 12-2a}) \\ &= \sqrt{3} V_p \angle -30^\circ \end{aligned}$$

同理可得

$$\bar{V}_{BC} = \sqrt{3} V_p \angle 90^\circ \quad \bar{V}_{CA} = \sqrt{3} V_p \angle -150^\circ$$

繪製以上相電壓與線電壓，如圖 12-2m。

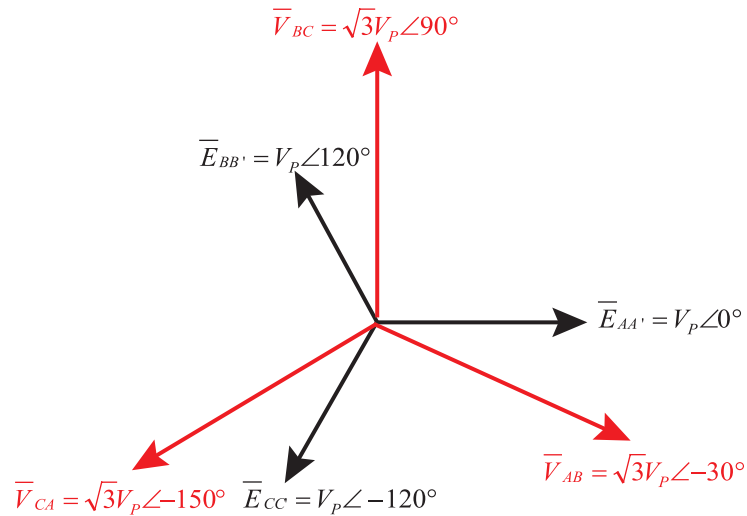


圖 12-2m 逆相序的相電壓與線電壓

△形連接（三相發電機）

將三個繞組的線尾分別接到下一個繞組的線頭，即 A' 接 B 、 B' 接 C 、 C' 接 A ，分別連接在一起，形成一個封閉迴路，再從三個連接點 A 、 B 與 C ，分別接一引線，連接到負載，這種接法外形像一個「△」形，因此稱為 △（delta）形連接，如圖 12-2n 所示。

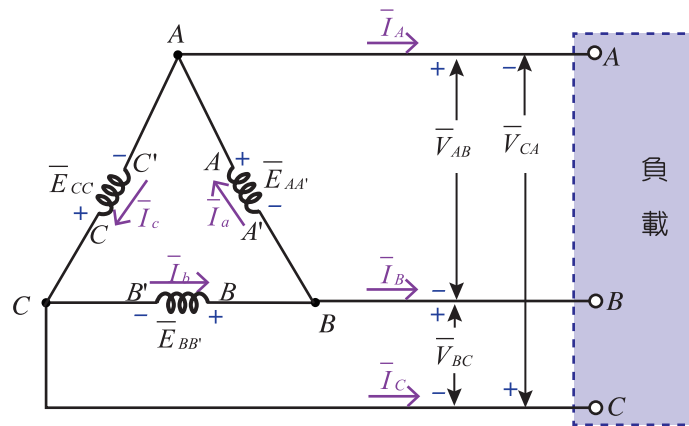


圖 12-2n △連接的三相發電機

相電壓（ $\bar{V}_P$ ）

如圖中的 $\bar{E}_{AA'}$ 、 $\bar{E}_{BB'}$ 、 $\bar{E}_{CC'}$ ，稱為相電壓（ $\bar{V}_P$ ）。

⚡ 線電壓 ($\bar{V}_L$)

如圖中的 $\bar{V}_{AB}$ 、 $\bar{V}_{BC}$ 、 $\bar{V}_{CA}$ ，稱為線電壓 ($\bar{V}_L$)。依據 KVL， $\triangle$ 接電路的線電壓等於相電壓，即

$$\bar{V}_L = \bar{V}_P$$

⚡ 相電流 ($\bar{I}_P$)

如圖中的 $\bar{I}_a$ 、 $\bar{I}_b$ 、 $\bar{I}_c$ ，稱為相電流。

⚡ 線電流 ($\bar{I}_L$)

如圖中的 $\bar{I}_A$ 、 $\bar{I}_B$ 、 $\bar{I}_C$ ，稱為線電流。 $\triangle$ 接電路的線電流等於相電流的 $\sqrt{3}$ 倍，即：

$$\bar{I}_L = \sqrt{3}\bar{I}_P$$

以正相序為例，各相電流 ($\bar{I}_a$ 、 $\bar{I}_b$ 、 $\bar{I}_c$) 的相量式為：

$$\bar{I}_a = I_P \angle 0^\circ, \bar{I}_b = I_P \angle -120^\circ, \bar{I}_c = I_P \angle 120^\circ。$$

由圖 12-2n 的節點 A，依據 KCL：

$$\bar{I}_a = \bar{I}_A + \bar{I}_c \text{ (流進去之和等於流出去之和)}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \bar{I}_A &= \bar{I}_a - \bar{I}_c = I_P \angle 0^\circ - I_P \angle 120^\circ \text{ (代入程式 12-2a)} \\ &= \sqrt{3}I_P \angle -30^\circ \text{ A} \end{aligned}$$

節點 B：

$$\begin{aligned} \bar{I}_B &= \bar{I}_b - \bar{I}_a = I_P \angle -120^\circ - I_P \angle 0^\circ \text{ (代入程式 12-2a)} \\ &= \sqrt{3}I_P \angle -150^\circ \text{ A} \end{aligned}$$

節點 C：

$$\begin{aligned} \bar{I}_C &= \bar{I}_c - \bar{I}_b = I_P \angle 120^\circ - I_P \angle -120^\circ \text{ (代入程式 12-2a)} \\ &= \sqrt{3}I_P \angle 90^\circ \text{ A} \end{aligned}$$

繪製以上相電流、線電流，如圖 12-2o。

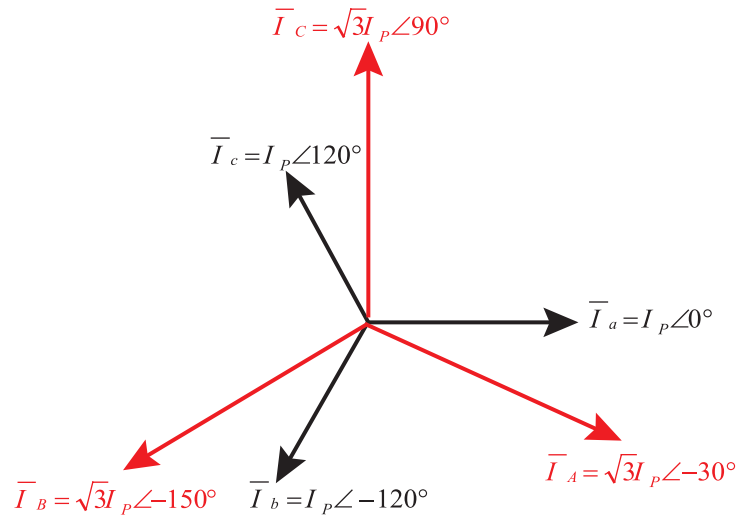


圖 12-2o 逆相序的相電流與線電流

同理，若是逆相序，逆相序相電流如下：

$$\bar{I}_a = I_p \angle 0^\circ, \bar{I}_b = I_p \angle 120^\circ, \bar{I}_c = I_p \angle -120^\circ$$

由圖 12-2n 的節點 A、B 與 C，根據 KCL，同理可求得

$$\bar{I}_A = \sqrt{3} I_p \angle 30^\circ, \bar{I}_B = \sqrt{3} I_p \angle 150^\circ, \bar{I}_C = \sqrt{3} I_p \angle -90^\circ$$

繪製以上相電流與線電流，如圖 12-2p。

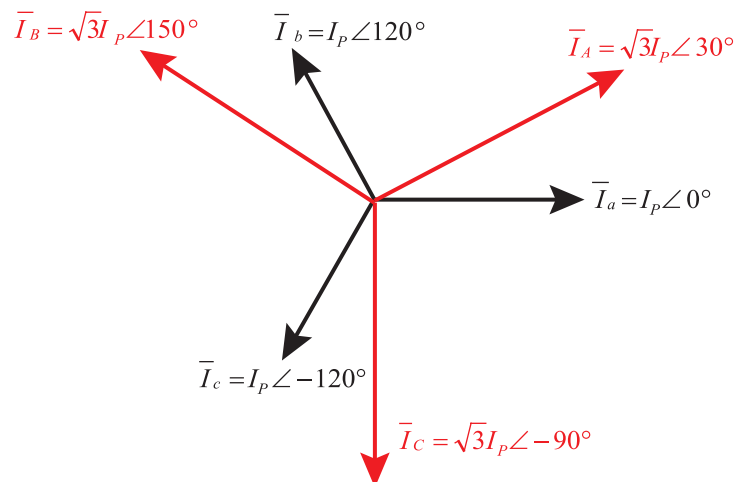


圖 12-2p 逆向序相電流與線電流相量圖

三相負載的連接

如前所述，三相發電機有 Y 形及 $\triangle$ 形兩種接法；而在負載端，也可以將三個等值阻抗 Z_p ($Z_p = R \pm jX$) 連接成 Y 形或 $\triangle$ 形。通常在表達三相連接時，其格式為：「發電機端連接方式 - 負載端連接方式」，例如「Y- $\triangle$ 」表示：發電機端為 Y 形連接，負載端為 $\triangle$ 形連接；其他的三相連接尚有：Y-Y、 $\triangle$ - $\triangle$ 及 $\triangle$ -Y 等接法。

負載端的連接方式，不論是 Y 形或 $\triangle$ 形，其相電壓、線電壓、相電流及線電流的關係，和發電機端是一樣的。歸納如下：

- Y 形三相負載連接，如圖 12-2q。
 - 線電壓為相電壓的 $\sqrt{3}$ 倍，即 $\bar{V}_L = \sqrt{3} \bar{V}_P$ 。
 - 線電流等於相電流，即 $\bar{I}_L = \bar{I}_P$ 。
- $\triangle$ 形三相負載連接，如圖 12-2r。
 - 線電流等於相電流 $\sqrt{3}$ 倍，即 $\bar{I}_L = \sqrt{3} \bar{I}_P$ 。
 - 線電壓等於相電壓，即 $\bar{V}_L = \bar{V}_P$ 。

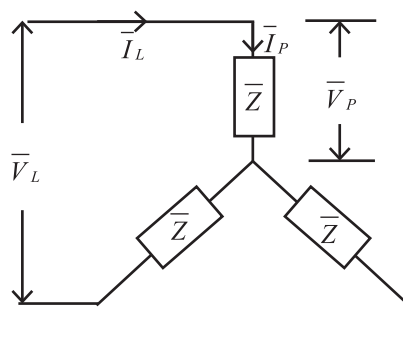
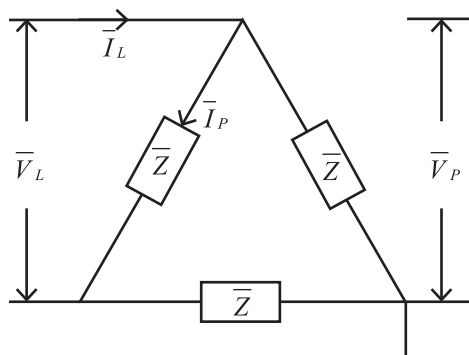


圖 12-2q 負載 Y 接

- 三相有效功率 (P)
三相電路的總有效功率 P （又稱為平均功率或實功率），為各相有效功率之和，以公式表示如下：

$$P = 3 V_P I_P \cos \theta$$

以上 V_P 和 I_P 為相電壓及相電流， θ 為 V_P 和 I_P 的相角差。

圖 12-2r 負載 $\triangle$ 接

- 三相無效功率 (Q)
三相電路的總無效功率 Q （又稱為虛功率），為各相無效功率之和，以公式表示如下：

$$Q = 3 V_P I_P \sin \theta$$

5. 三相視在功率 (S)

三相電路的總視在功率 S ，為各相視在功率之和，表示如下：

$$S = 3V_P I_P$$

$$\text{或 } \bar{S} = P + jQ = \sqrt{P^2 + Q^2} \angle \tan^{-1} \frac{Q}{P} = S \angle \theta$$

 6. 三相功率因數 (PF)

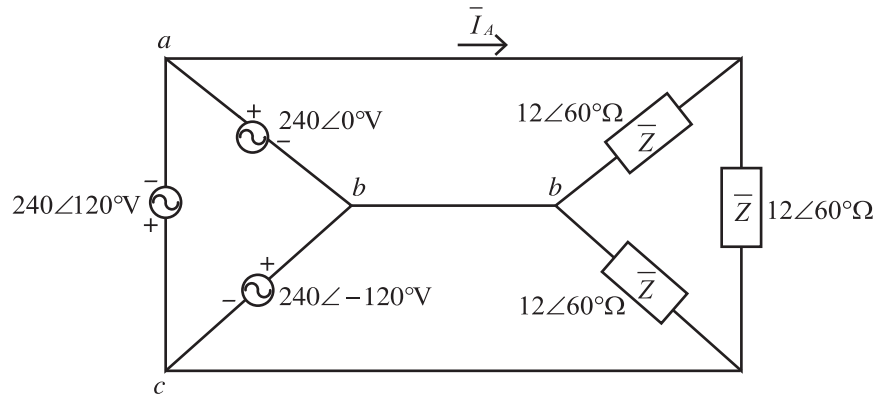
設 θ 為 V_P 和 I_P 的相角差，則三相的功率因數為：

$$PF = \cos \theta = \frac{P}{S} = \frac{\text{總有效功率}}{\text{總視在功率}}$$

範例 12-2a

如下圖所示之三相電路，求線電流 $\bar{I}_A$ 之值為何？

統測 109



- (A) $20\sqrt{3} \angle -90^\circ \text{ A}$ (B) $20\sqrt{3} \angle 90^\circ \text{ A}$ (C) $20 \angle -90^\circ \text{ A}$ (D) $20 \angle 90^\circ \text{ A}$

解

(1) 於負載端的節點也標注名稱，如圖 (1)。

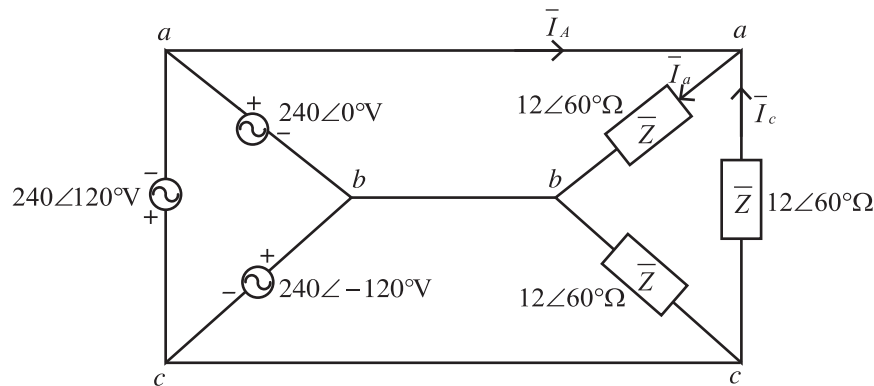


圖 (1)

(2) 電源與負載都是 Y 接，其相電壓都相同。

(3) 依據歐姆定律：

$$\bar{I}_a = \frac{\bar{V}_{ab}}{Z} = \frac{240\angle 0^\circ}{12\angle 60^\circ} = 20\angle -60^\circ \text{ A}$$

$$\bar{I}_c = \frac{\bar{V}_{ac}}{Z} = \frac{240\angle 120^\circ}{12\angle 60^\circ} = 20\angle 60^\circ \text{ A} \quad (\text{請留意電源與 } \bar{I}_c \text{ 的方向})$$

(4) 節點 a ，依據 KCL：

$$\bar{I}_A + \bar{I}_c = \bar{I}_a \quad (\text{流進去之和} = \text{流出去之和})$$

$$\Rightarrow \bar{I}_A = \bar{I}_a - \bar{I}_c$$

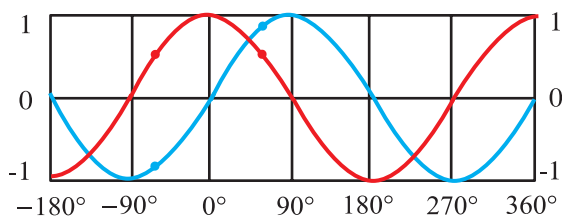
$$= 20\angle -60^\circ - 20\angle 60^\circ \quad (\text{可自行使用程式 12-2a})$$

$$= 20((\cos -60^\circ + j \sin -60^\circ) - (\cos 60^\circ + j \sin 60^\circ)) \quad \text{圖(2)}$$

$$= 20\left(\left(\frac{1}{2} + j\frac{-\sqrt{3}}{2}\right) - \left(\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)$$

$$= 20(-j\sqrt{3}) = -j20\sqrt{3}$$

$$= 20\sqrt{3}\angle -90^\circ \text{ A}$$



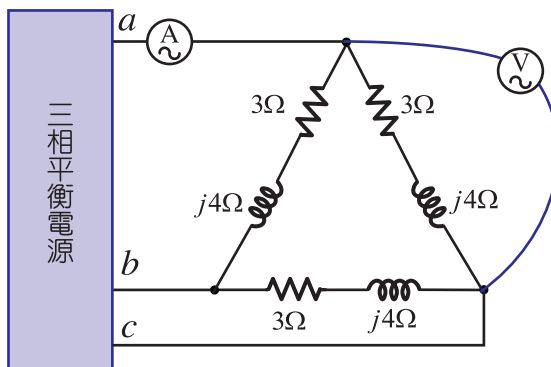
圖(2) $\sin \theta$ 、 $\cos \theta$ 函數圖

範例12-2b

如右圖所示電路，其中 $\textcircled{A}$ 、 $\textcircled{V}$ 為理想的電流表及電壓表，若電流表指示值為 8.66A，則下列敘述何者正確？

統測 113

- (A) 負載的總平均功率為 225W
- (B) 負載的總虛功率為 325VAR
- (C) 負載的總視在功率為 395VA
- (D) 電壓表指示值為 60V



解

(1) 標註節點名稱，如圖(1)。

(2) 由題目得知 $I_L = 8.66 \text{ A}$ ， $\bar{Z} = 5\angle 53^\circ \Omega$ ， $\theta = 53^\circ$ ，如圖(1)。

(3) 原電路圖負載是 Δ 接，相電流 $I_b = I_c = \frac{I_L}{\sqrt{3}} = 5 \text{ A}$ 。

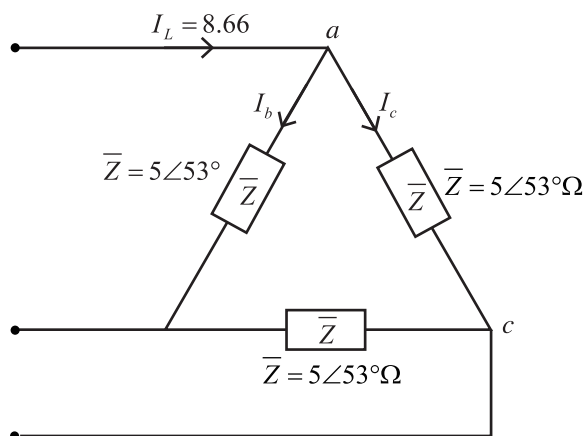


圖 (1)

(4) 由 $I_c = 5\text{A}$ ， $Z = 5$ 得到 $V_{ac} = I_c \times Z = 5 \times 5 = 25\text{V}$ 。

(A) 負載的總平均功率 $= 3V_{ac} \cdot I_c \cdot \cos 53^\circ = 3 \times 25 \times 5 \times \frac{3}{5} = 225\text{W}$ (對)。

($\because \bar{Z} = \frac{\bar{V}}{I}$ ，所以 θ 可取 $\bar{Z}$ 的角度)

(B) 負載的總虛功率 $= 3V_{ac} \cdot I_c \cdot \sin 53^\circ = 3 \times 25 \times 5 \times \frac{4}{5} = 300\text{VAR}$ (錯)。

(C) 負載的總視在功率 $= 3V_{ac} \cdot I_c = 3 \times 25 \times 5 = 375\text{VA}$ (錯)。

(D) 電壓表指示值 $= V_{ac} = 25\text{V}$ (錯)。

範例12-2c

如右圖所示三相平衡電路，若線電壓有效值為 400V 、三相負載的總實功率（總平均功率）為 4.8kW 、功率因數為 0.6 落後，則阻抗 $\bar{Z}_L$ 為何？

（備註： $\cos 53.1^\circ = 0.6$ ）

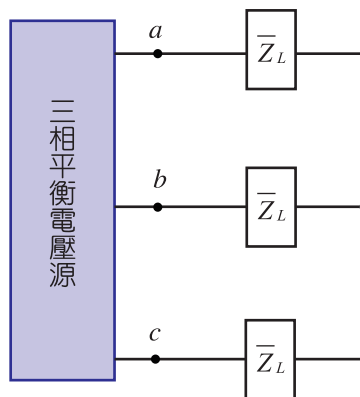
統測 111

(A) $(12 + j12\sqrt{3}) \Omega$

(B) $(12\sqrt{3} + j12) \Omega$

(C) $(16 + j12) \Omega$

(D) $(12 + j16) \Omega$



解

(1) 重畫電路如圖 (1)。

(2) 由題目得知 $V_{ab} = \text{線電壓} = 400\text{V}$ 。 $\Rightarrow V_P = \frac{V_{ab}}{\sqrt{3}} = \frac{400}{\sqrt{3}}\text{V}$ ，並標示於圖 (1)

(3) 總平均功率是 4.8kW ，每個負載的功率是 $\frac{4.8\text{k}}{3} = 1.6\text{kW}$ 。

(4) 由 $P = \frac{V_P^2 \times \cos \theta}{Z} \Rightarrow 1.6\text{k} = \frac{(\frac{400}{\sqrt{3}})^2 \times 0.6}{Z}$

$$Z = \frac{(\frac{400}{\sqrt{3}})^2 \times 0.6}{1.6\text{k}} = 20\Omega$$

(5) 由功率因數為 0.6 ，得知 $\cos \theta = 0.6$ ， $\theta = 53^\circ$ 。

(6) 由「落後」得知其為電感性， $\bar{Z}$ 落在第一象限。

(7) $\bar{Z} = a + jb = 20\angle 53^\circ$ ，且在第一象限 $\Rightarrow$

$a = 12$ ， $b = 16$ ，如圖 (2)。

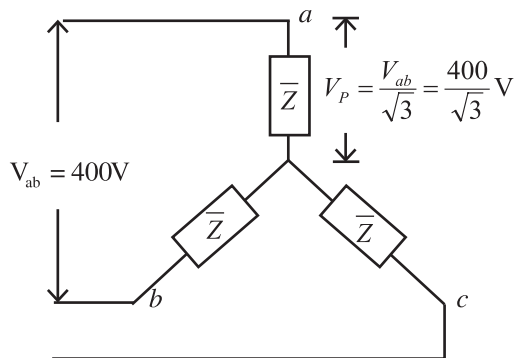


圖 (1)

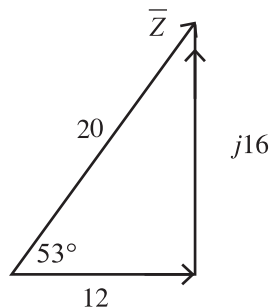


圖 (2)

範例12-2d

有一功率因數為 0.866 落後之三相平衡負載，將其連接於線電壓有效值為 220V 之三相平衡電源，已知線電流有效值為 10A ，則負載每相所消耗之平均功率約為何？

統測 110

(A) 1100W (B) $1100\sqrt{3}\text{W}$ (C) 2200W (D) $2200\sqrt{3}\text{W}$

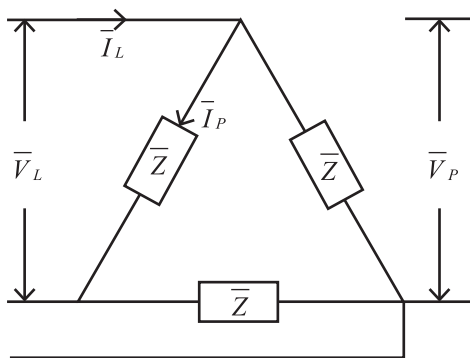
解

(1) 題目沒說三相平衡負載是 Δ 或 Y 接，只提供線電壓 $V_L = 220\text{V}$ ，線電流 $I_L = 10\text{A}$ ，所以只好 Δ 接與 Y 接都討論。

(2) 若是 Δ 接，如圖 (1)：

$$V_P = V_L$$

$$I_P = \frac{I_L}{\sqrt{3}}$$

圖 (1) Δ 接

每個負載平均功率 P

$$P = V_p I_p \cos \theta = V_L \frac{I_L}{\sqrt{3}} \times 0.866 = 220 \cdot \frac{10}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 1100\text{W}$$

(3) 若是 Y 接，如圖 (2)：

$$I_p = I_L$$

$$V_p = \frac{V_L}{\sqrt{3}}$$

每個負載平均功率 P

$$P = V_p I_p \cdot \cos \theta$$

$$= \frac{V_L}{\sqrt{3}} I_L \cdot 0.866 = \frac{220}{\sqrt{3}} \cdot 10 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 1100\text{W}$$

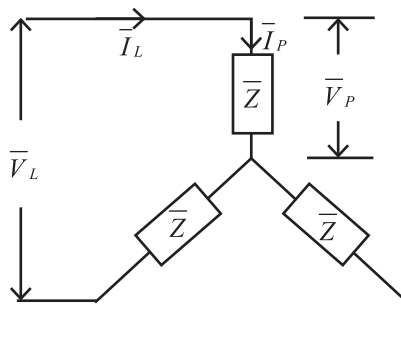


圖 (2) Y 接

(4) 由以上 (2) 與 (3) 的平均功率計算，得到結論，不論是 Δ 接或 Y 接，每個負載的平均 P 都是

$$P = \frac{1}{\sqrt{3}} V_L I_L \cos \theta \quad (\text{一個負載})$$

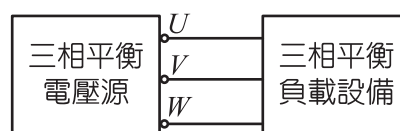
若是 3 個負載的總平均功率 P ，則

$$P = \sqrt{3} V_L I_L \cos \theta \quad (\text{三個負載})$$

自我練習

▲ 閱讀下文，回答第 1 - 2 題

某生購買了一組三相平衡負載設備，已知此三相平衡負載設備為 Δ 接方式，且每相阻抗為 $3 + j4$ 歐姆。今將其接至三相平衡電壓源，如右圖所示之 U 、 V 、 W 三端子，且線電壓有效值為 100V。



- 上右圖中負載總消耗功率為多少瓦特？統測 112
(A) 600 (B) 1200 (C) 2400 (D) 3600
- 當連接至三相平衡電壓源之 V 點端子的導線因脫落發生斷路，則電路負載總消耗功率變為多少瓦特？統測 112
(A) 1800 (B) 2000 (C) 2400 (D) 3600

配電盤安全須知

This photograph shows the internal components of a three-phase motor. The central shaft is visible, surrounded by the stator windings. A terminal box at the top contains various electrical connections, including a red and black power cord, a green ground wire, and several other colored wires (yellow, green, blue, red, black) connected to the motor's terminals. A label on the terminal box indicates the motor's specifications: "HY-444 380V 1.5kW 1.5A 50Hz".

上面N(白色接線)
下面E(綠色接線)

The diagram illustrates a three-phase power distribution system. On the left, a '電力公司' (Power Company) supply point shows three phases (A, B, C) and a neutral line (N). Phase A is red, B is black, and C is grey. The neutral line is grey. The system is divided into three main sections by vertical lines labeled A, B, and C. Each section contains a main NFB (Neutral Fault Breaker) and a sub-NFB. The first section (left) has a main NFB connected to phases A, B, and C, and a sub-NFB connected to phase A. The second section (middle) has a main NFB connected to phases A, B, and C, and a sub-NFB connected to phase B. The third section (right) has a main NFB connected to phases A, B, and C, and a sub-NFB connected to phase C. Each sub-NFB is connected to a set of loads: two air conditioning units (冷氣機) and one light (電燈). The loads are connected to the sub-NFBs via their own NFBs. The neutral line (N) is connected to all NFBs and sub-NFBs. The earth line (E) is connected to all sub-NFBs and the loads. The earth line is connected to a ground symbol (埋入地裡) at the bottom. The diagram also shows an ELCB (Earth Leakage Circuit Breaker) connected to the neutral line (N) and the earth line (E) for the bathroom, kitchen, and plug outlets (浴室、廚房、插座).

圖 12-3c 配電盤接線示意圖

配電盤使用安全須知如下：

1. 所有電器，用電前都要經過過載保護裝置。過載保護裝置以前是用保險絲，現在都使用無熔絲開關。無熔絲開關 (no fuse breaker，簡稱 NFB)，如圖 12-3a、12-3b，無熔絲開關是利用雙金屬片 (bimetal) 受熱彎曲，兩種不同金屬彎曲的角度不同，推動跳脫機構，致使接點被頂開，供電迴路因此被切斷，以達到保護之目的。當無熔絲開關跳開時，應先檢查用電狀況，排除部分用電，並休息三分鐘以上，讓雙金屬片降低溫度，跳脫時會卡在中間位置，故障排除後須往下扳再往上扳。但每次保護裝置斷開電源後，開關也會損耗，也會降低此開關的使用年限。
2. 大功率電器都要有專用無熔絲開關，例如每一台冷氣與廚房都有專用無熔絲開關。
3. 每一迴路都不可以超過過載保護器的限流，例如家庭用電的每一個迴路都有接無熔絲過載保護器，此無熔絲過載保護器通常是限流 20A。

4. 較潮濕的用電迴路，例如，廚房、浴室、陽台、庭園用電，都要使用漏電斷路器。漏電斷路器如圖 12-3e，也就是當有人觸電、或火線泡水，都是漏電的現象，漏電斷路器都會立即切斷電源，保護使用者。(漏電斷路器的原理是不斷偵測出去的電流與回來的電流，若不相等，表示漏電，此時立即切斷電源)



圖 12-3e 漏電斷路器 (摘自蝦皮購物)

5. 中性線不可接無熔絲開關。因為中性線若斷掉，如範例 12-1b，功率小者的電阻大，分壓就大，若耐壓不足，就容易燒毀。
6. 配電箱的中性線要與地線連接，且地線要確實連接至建築物牆壁內的鋼條。

範例12-3a

若家用電子鍋的標示如圖 (1)，廚房專用無熔絲開關限流是 20A，請問廚房至多可以使用幾個電子鍋？



圖 (1) 電子鍋功率

解

(1) 由 $P = IV \Rightarrow 760 = I \cdot 110 \Rightarrow I = 6.9 \text{ A}$

(2) $\Rightarrow n = \frac{20}{6.9} \div 2.9$ 個，表示可以同時讓 2 個電子鍋工作，若接 3 個電子鍋，就超出 20A，且廚房還有冰箱，所以通常煮到一半就會跳電。

自我練習

1. 請找出電鍋、冰箱、洗衣機、吹風機、筆電、充電器等功率貼紙，觀察其功率，並計算其電流。
2. 若冰箱的功率是 130W、電熱水器是 800W、電鍋是 700W、電子鍋是 760W，請問以上四者同時工作時，總電流是多少？有沒有超過 20A？

延長線及電線使用安全須知

現代 3C 產品都需要充電，所以延長線插座（如圖 12-3f）的需求越來越多，台灣市售延長線通常額定電流為 15A、最大功率 1650W、且最高可承受 125V 的電壓。安檢合格的延長線也都有「**過載保護裝置**」，當延長線插入太多的電器，導致電流超過負載時，保護裝置會瞬間跳脫斷電，在保護電器用品的同時也避免延長線過熱、電線走火。不過需要注意的是，雖然配有過載保護裝置的延長線能夠避免電流超過負載，但每次保護裝置斷開電源後，開關也會損耗，也會降低使用年限。以下是延長線及電線使用安全須知：



（當過載跳電後，可按一下過載重置開關，即可繼續通電）

過載保護開關

圖 12-3f 具有過載保護的延長線

1. 拔下電線插頭時，應手握插頭取下，不可僅拉電線，而造成電線內部銅線斷裂。
2. 電線內部銅線部分斷裂稱為半斷線，當電流流過半斷線時，因電路突然變窄，造成線路過載而產生高熱。
3. 延長線不可壓在家具、重物下方，以避免發生損壞產生危險，也不可經過地毯、衣物等易燃品。
4. 使用延長線時，應注意不可將其纏綁，由於電線經纏綁後，熱量很難散去，因此溫度容易升高而將塑膠熔解，造成銅線短路著火。
5. 延長線避免放置爐具上方，因爐火高溫將塑膠熔解，造成銅線短路著火。
6. 延長線應在容許負載容量下使用，且延長線上若有連接多孔插座時，應使用具有過載保護裝置之產品。
7. 老舊、破損之延長線會造成短路、漏電或感電等危險，應即立更新。
8. 使用中之延長線若有發燙或異味產生，此為過載現象，應立即更換線徑較大的延長線。

裝置電器時應注意事項

1. 燈泡或其他電熱裝置，切勿靠近易燃物品，尤其不可在衣櫃內裝設電燈，以免因為高溫引起火災。
2. 用電不可超過電線許可負載能力。
3. 增設大型電器時，例如大型烤箱、大型冰箱、冷氣等，應先重新鋪設專用電器配線。
4. 切勿利用分叉或多口插座，同時使用多項電器。

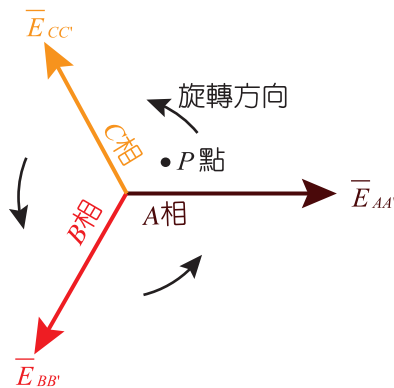
5. 電器外殼若是導電的金屬，例如、冰箱、電腦、烤箱等，外殼都要連接接地線，這樣當火線因為動物咬、或拉扯等因素造成破皮而碰觸電器外殼時，才能保護使用者。（冰箱、洗衣機都有付一條綠色接地線，請將它連接至電源線的接地線，電腦則直接使用三線式插頭，表示電腦機殼自動連接至地線）

故障排除時應注意事項

1. 電器發生故障，應先切斷電源開關，以免發生短路，引起電線著火。
2. 屋內配線陳舊、外部絕緣體破損或插座損壞，都必須立即更換修理。
3. 保險絲熔斷、或無熔絲開關跳開，通常是用電過載的警告，應立即停止部分用電，切勿誤以為保險絲太細而換用較粗或以銅絲、鐵絲替代。
4. 切勿用潮濕的手碰電器設備，以防觸電。
5. 電線走火時，應立即切斷電源，電源未切斷前，切勿用水潑覆其上，以防觸電。

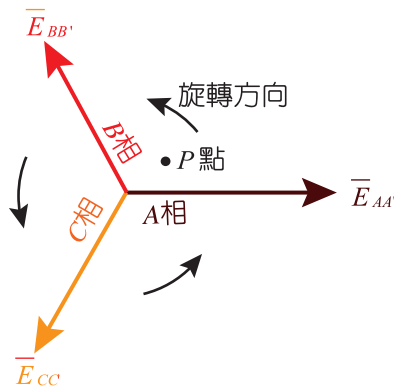
12-4 本章內容摘要

1. 單相二線式 ($1\phi 2W$) 是指該電源在同一時間內只有提供一個固定波幅及頻率的正弦波電壓。
2. 單相三線式 ($1\phi 3W$)，提供兩組 110 V 電源及一組 220V 電源。
3. 單相三線式的優點如下：
 - (1) 低功率電器用 110V，大功率用 220V，可以減少電流的損耗及降低用電的恐懼。
 - (2) 當使用相同的導線，在相同的距離內傳送相同的功率時，就線路電壓降 (V) 而言： $1\phi 3W$ 只有 $1\phi 2W$ 的一半。
 - (3) 當使用相同的導線，在相同的距離內傳送相同的功率時，就電力損失 (P) 而言： $1\phi 3W$ 只有 $1\phi 2W$ 的 $1/4$ 。
4. 正向序的三相電壓 ($E_{AA'}$, $E_{BB'}$, $E_{CC'}$) 相量圖與相量表示如下：



$$E_{AA'} = V_p \angle 0^\circ, \quad E_{BB'} = V_p \angle -120^\circ, \quad E_{CC'} = V_p \angle 120^\circ$$

5. 逆向序的三相電壓 ($E_{AA'}$, $E_{BB'}$, $E_{CC'}$) 相量圖與相量表示如下：



$$E_{AA'} = V_p \angle 0^\circ, \quad E_{BB'} = V_p \angle 120^\circ, \quad E_{CC'} = V_p \angle -120^\circ$$

6. Y 形連接的特性如下：

- ① 線電流等於相電流

$$I_L = I_P$$

- ② 線電壓為相電壓的
- $\sqrt{3}$
- 倍，即：

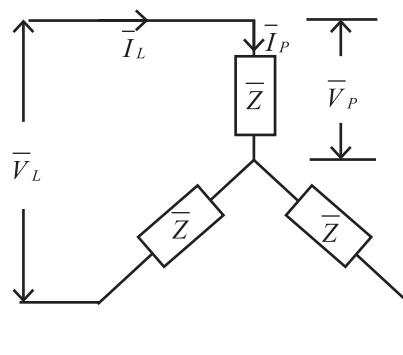
$$V_L = \sqrt{3}V_P$$

- ③ 若是正向序，則線電壓超前相電壓
- 30°

$$\bar{V}_L = \sqrt{3}V_P \angle 30^\circ \text{ V}$$

- ④ 若是逆相序，則線電壓落後相電壓
- 30°

$$\bar{V}_L = \sqrt{3}V_P \angle -30^\circ \text{ V}$$

7. Δ 形連接的特性如下：

- ① 線電壓等於相電壓，即

$$V_L = V_P$$

- ② 線電流等於相電流的
- $\sqrt{3}$
- 倍，即：

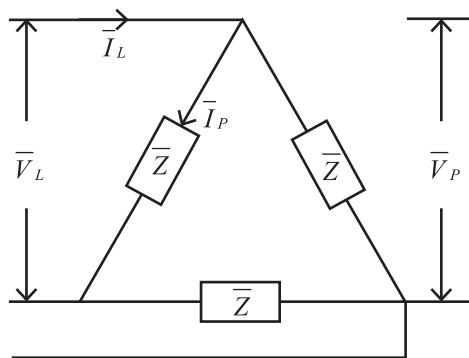
$$I_L = \sqrt{3}I_P$$

- ③ 若是正向序，則線電流落後相電流
- 30°

$$\bar{I}_L = \sqrt{3}I_P \angle -30^\circ$$

- ④ 若是逆相序，則線電流超前相電流
- 30°

$$\bar{I}_L = \sqrt{3}I_P \angle 30^\circ$$

8. 三相負載的接線與三相電源相同，一樣有 Y 接與 Δ 接，且其線電壓、線電流、相電壓、相電流的關係同三相電源的 Y 接與 Δ 接。9. 三相負載的總有效平均功率 P

$$P = 3 V_P I_P \cos \theta$$

$$= \sqrt{3} V_L I_L \cos \theta \quad (\text{不論 Y 接或 } \Delta \text{ 接都適用})$$

10. 三相負載的總無效功率 (Q)

$$Q = 3 V_P I_P \sin \theta$$

11. 三相負載的總視在功率 (S)

$$S = 3 V_P I_P$$

$$\text{或 } \bar{S} = P + jQ = \sqrt{P^2 + Q^2} \angle \tan^{-1} \frac{Q}{P} = S \angle \theta$$

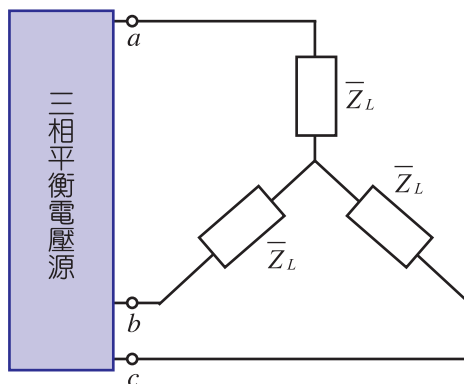
12. 三相負載的功率因數 (PF)

$$PF = \cos \theta = \frac{P}{S} = \frac{\text{總有效功率}}{\text{總視在功率}}$$

12-5 課後習題

選擇題

- 有一三相平衡電源，當接至平衡三相 Y 接負載時，負載總消耗功率為 1600W，若外接電壓與負載每相阻抗不變之下，將負載改為 Δ 連接，且負載仍然能正常工作，則負載總消耗功率為何？ 統測 108
(A) 1600W (B) 2400W (C) 3200W (D) 4800W
- 有一個三相平衡電源，供給每相阻抗為 $11\angle 60^\circ \Omega$ 之平衡三相 Δ 接負載。若電源線電壓有效值為 220 V，則此電源供給之總平均功率為何？ 統測 107
(A) 13200W (B) 6600W (C) 4400W (D) 2200W
- 有一三相平衡電源供應 Y 接三相平衡負載，電源相序為 ABC，若電源側線電壓 $\bar{V}_{AB} = 220\angle 30^\circ$ V 線電流 $\bar{I}_A = 5\angle -30^\circ$ A 則此電路的功率因數角為何？ 統測 106
(A) 0° (B) 30° (C) 60° (D) 90°
- 有一三相發電機供應 220V 的電源電壓給一 Δ 接之三相平衡負載，已知每相負載阻抗為 $5 + j8.66\Omega$ ，試求此三相負載消耗的總平均功率為何？ 統測 105
(A) 2420W (B) 4192W (C) 5134W (D) 7260W
- 三相平衡 Y 接電源系統， n 為中性點，若線電壓分別為 $\bar{V}_{ab} = 220\sqrt{3}\angle 0^\circ$ V、 $\bar{V}_{bc} = 220\sqrt{3}\angle 120^\circ$ V 及 $\bar{V}_{ca} = 220\sqrt{3}\angle -120^\circ$ V，下列有關相電壓 $\bar{V}_{bn}$ 之敘述，何者正確？ 統測 104
(A) $\bar{V}_{bn} = 220\sqrt{3}\angle -120^\circ$ V (B) $\bar{V}_{bn} = 220\sqrt{3}\angle 150^\circ$ V
(C) $\bar{V}_{bn} = 220\sqrt{3}\angle 90^\circ$ V (D) $\bar{V}_{bn} = 220\sqrt{3}\angle 90^\circ$ V
- 如右圖所示之三相平衡電路，若電源線對線電壓有效值為 $200\sqrt{3}$ V，負載阻抗 $\bar{Z}_L = 8 + j6\Omega$ ，則三相負載的總平均功率為何？ 統測 103
(A) 3.2kW (B) 6.4kW
(C) 9.6kW (D) 12.8kW



觀念素養題

1. 當冰箱電線的火線被老鼠咬破，碰觸到冰箱外殼時，請比較冰箱外殼有接地線與沒接地線的差別？
2. 請觀察馬路邊的台電電線桿、配電箱有沒有接地線。台電的維修貨車在維修電線時，有沒有特別接一條接地線。
3. 請將家中陽台或浴室的插座噴水，請問電源會不會跳電？家中陽台的洗衣機插座，於下大雨後，若淋到雨，請問會不會跳電？
4. 請問庭園的電線若被割草機割破，庭園因下雨積水，請比較有無接漏電保護器的差別？火線若裸露，且沒跳電，當使用者走在積水上，會不會有危險？
5. 看到裸露的火線，故意在上面尿尿，請問會不會有危險？
6. 家裡常用插座有兩孔、與三孔插座，如圖 (1)、(2)、(3)。



圖 (1) 110V 兩孔插座



圖 (2) 110V 三孔插座



圖 (3) 220V 冷氣插座

請用三用電表的交流電壓檔，量測其電壓。

（請留意插座火線的寬度比較小，中性線比較寬）請使用三用電表量測其電壓。

7. 若有三用電表量測電壓如圖 (4)，請問其電壓_____。
8. 若有三用電表量測電壓如圖 (5)，請問其電壓_____。

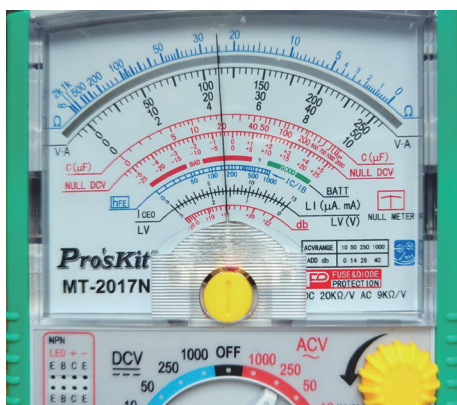


圖 (4)

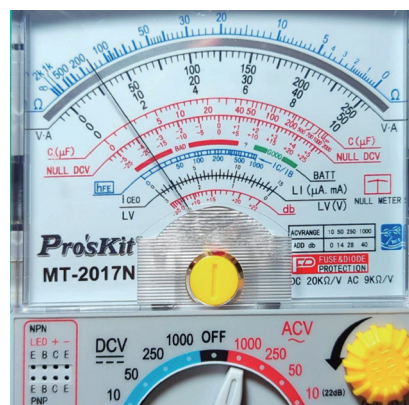


圖 (5)

9. 示波器接線如圖 (6)，CH2 設定為反相，圖 (7) 是以示波器量測 AN 、 NB 的圖形，請留意兩個圖形是重疊。(請特別留意：因為示波器 CH1、CH2 的地線內部是互相連通，所以不能接線如圖 (8)，因為圖 (8) 的火線 B 等於被短路，此時無熔絲開關就是瞬間跳電)，圖 (9) 是波形的特寫，測試棒使用「*10」，Ch1、CH2 Volts/Div=5V，Time/Div=2ms，請問 CH1、Ch2 的電壓_____，週期_____，頻率_____。(由圖可知，同一個時間，是由 A 往 N 送電流， N 也往 B 送電流，所以若負載平衡，中性線的電流， AN 迴路是回， NB 迴路是出，所以中性線無電流)

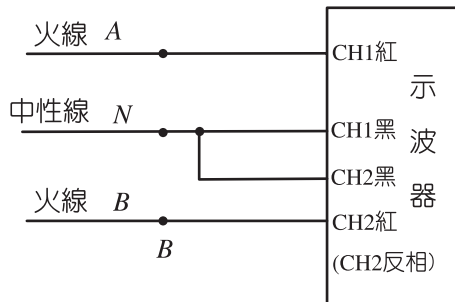


圖 (6)

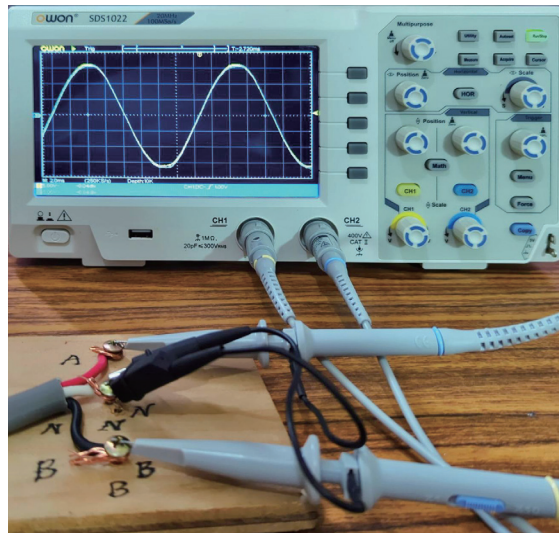


圖 (7)

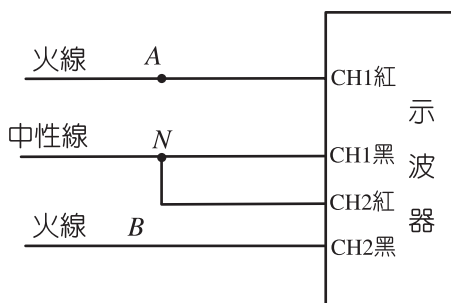


圖 (8)

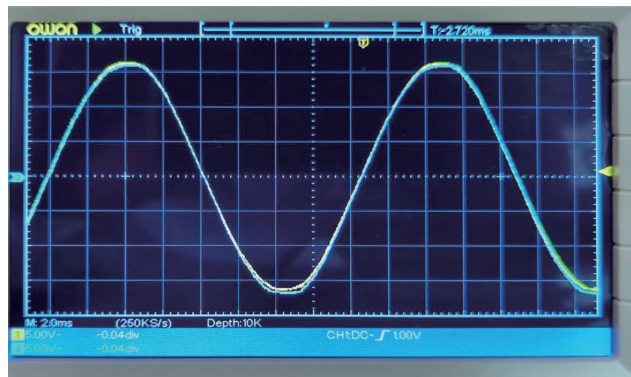


圖 (9)

10. 示波器接線如圖 (10)，圖 (11) 是以示波器量測 AB 、 NB 的圖形，黃色是 NB 的波形，藍色是 AB 的波形，示波器 CH1、CH2 Volts/Div 都是 100V（請特別留意：因為示波器的地線與電源地線內部連接，本項實驗務必隔離示波器地線，隔離的方式很多，大部分的人都是直接將地線折斷，但這樣很危險，正確的作法是使用地線隔離轉接頭，此轉接頭也很簡單，就是輸入只有兩個接點，但輸出有三個洞，讓您將三線插頭插入，此時地線就被隔離了）。由圖 (11) 可知 A 和 N 是同時送出電流，所以中性線 N ，同一時間，有電流出去，也有電流回去，所以若負載平衡，電流為零。

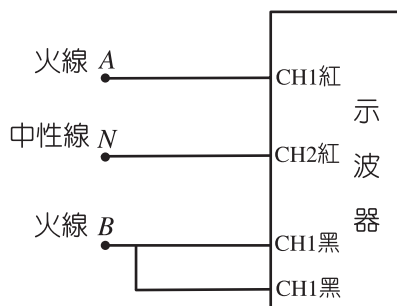


圖 (10)

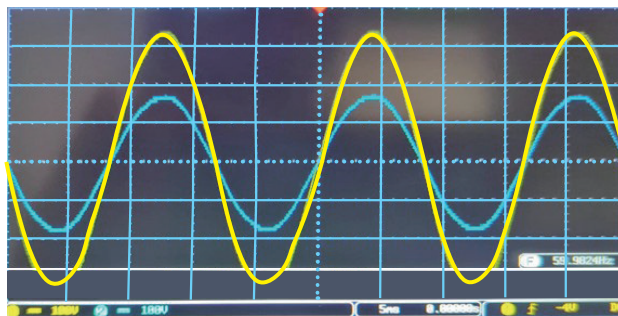


圖 (11)

11. 間接加熱型煮飯用電鍋，其單相電源電壓有效值為 110V，煮飯用電熱線的功率為 800W，保溫用電熱線的功率為 40W，下列敘述何者正確？

統測 111

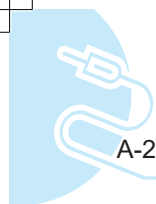
- (A) 煮飯用電熱線的電阻值大於保溫用電熱線的電阻值
- (B) 煮飯用電熱線的電阻值等於保溫用電熱線的電阻值
- (C) 煮飯時量測電源電流有效值約為 3.6A
- (D) 保溫時量測電源電流有效值約為 0.36A

附錄 1



本書關鍵字中英文對照與索引表

中文	英文	頁碼
暫態	transient state	7-2
穩態	steady state	7-2
時間常數	time constant	7-9
交流電	Alternating Current, AC	8-2
正弦波	sine wave	8-16
最大值	maximum value	8-16
最小值	minimum value	8-16
峰對峰值	peak to peak value	8-16
平均值	average value, av	8-16
有效值	effective value	8-18
均方根值	root-mean square,rms	8-18
方波	square wave	8-19
三角波	triangular wave	8-19
波峰因素	crest factor	8-23
波形因素	form factor	8-23
頻率	frequency	8-24
稱為週期	period	8-24
角度	angle	8-25
徑度	radian, rad	8-25



中文	英文	頁碼
角速度	angular velocity	8-26
相位角	phase angle	8-32
純量	scaler	8-37
向量	vector	8-37
複數	complex number	8-37
虛數	imaginary number	8-37
直角坐標	rectangular coordinates	8-38
極座標	polar coordinates	8-38
相量	phasor	8-50
阻抗	impedance	9-2
電容抗	capacitive reactance	9-2
電感抗	inductive reactance	9-2
電阻抗	electrical impedance	9-2
分壓定則	voltage divider theorem	9-25
導納	admittance	9-35
電導	conductance	9-35
電容納	capacitive susceptance	9-35
電感納	inductive susceptance	9-35
分流定則	current divider theorem	9-37
瞬間功率	instantaneous power	10-2
平均功率	average power	10-6
有效功率	effective power	10-6
實功率	real power	10-6
視在功率	apparent power	10-8
虛功率	imaginary power	10-10
無效功率	ineffective power	10-10
電抗功率	reactive power	10-10
功率因數	Power Factor	10-15
諧振	resonance	11-2
品質因數	quality factor	11-7

中文	英文	頁碼
頻帶寬度	bandwidth	11-8
選擇性	selectivity	11-8
半功率頻率	half-power frequency	11-9
單相二線式	single-phase two-wire system	12-2
單相三線式	single-phase three-wire system	12-2
三相電源	three-phase sources	12-7
正相序	positive sequence	12-9
逆相序	negative sequence	12-10
相電流	phase current	12-11
線電流	line current	12-11
相電壓	phase voltage	12-12
線電壓	line voltage	12-12

十二年國民基本教育

技術型高級中等學校電機與電子群

基本電學（下冊）

審定字號：技審字第○○○○○○號

書號：SE007

編著者：蔡懷文（健行科技大學電機系助理教授）、洪國勝

責任編輯：洪國勝

排版封面設計：陳彥慈（芒現）

發行所：泉勝出版有限公司

地址：高雄市左營區華夏路 708 號 17 樓

電話：0900757159

LINE ID：5abook

網址：www.goodbooks.com.tw Email:aa163677@yahoo.com.tw

訂購方式：電話：0900757159 LINE ID：5abook

Email:aa163677@yahoo.com.tw

初版日期：○○○年○○月

版次：初版第一刷

ISBN：000-000-00000-0-0

◎書內程式、圖片、資料的來源已盡查明之責且標注出處，若有疏漏，在此致歉，並請通知我們，我們將於再版時修訂。若發現書有缺頁、倒裝、嚴重污損，請直接盡快與本公司聯繫，我們會盡快更換。

◎版權所有，請大家共同遵守著作權。知識有價，請老師鼓勵學生買書、學生願意買書，僅存的作者、出版社與書局才能生存，後代子孫才能享受翻閱實體書籍的樂趣。