

第十二單元

用Python學數學與 繪製函數圖形

Python 內建很多數學工具，通通寫在 `numpy` 模組，本單元將介紹這些功能，這樣可以幫助理解或解決國中、高中的數學計算問題。

■一元多次方程式

解一元多次方程式是使用 `roots()` 方法，可解一元一次、一元二次、一元三次等方程式。例如，若有一元一次方程式如下：

$$x+2=0$$

則求其解的程式如下：

```
import numpy as a
b=a.roots([1,2])#x+2=0
print(b)#-2
```

又例如，一元二次方程式如下：

$$x^2-4x-12=0$$

求其解的程式如下：

```
import numpy as a
b=a.roots([1,-4,-12])#x**2-4x-12=0
print(b)#6,-2
```

又例如，一元三次方程式如下：

$$x^3-3x^2-16x-12=0$$

求其解的程式如下：

```
import numpy as a
b=a.roots([1,-3,-16,-12])#x**3-3x**2-16x-12=0
print(b)#6,-2,-1
```

二元一次或三元一次

二元一次或三元一次要使用 linalg 類別的 solve 方法。例如，若有二元一次方程式如下：

$$3x+y=5$$

$$x-2y=-3$$

則求其解的 Python 程式如下：

```
import numpy as a
c=a.array([[3,1],[1,-2]])
d=a.array([5,-3])
ans=a.linalg.solve(c,d)
print(ans)#1,2
```

又例如，三元一次方程式如下：

$$x+y-z=-2$$

$$x+z=2$$

$$x-y+2z=5$$

則求其解的 Python 程式如下：

```
import numpy as a
c=a.array([[1,1,-1],[1,0,1],[1,-1,2]])
d=a.array([-2,2,5])
ans=a.linalg.solve(c,d)
print(ans)#1,-2,1
```

▀ 向量內積（高中數學）

若有兩個向量如下：

```
m=(a1,a2,a3)
n=(b1,b2,b3)
```

向量內積公式是

```
m*n=(a1*b1+a2*b2+a3*b3)
```

運算結果是純量。例如，若有向量

```
m=(1,1,-1)
n=(2,0,1)
```

則其內積程式如下：

```
import numpy as a
m=a.array([1,1,-1])
n=a.array([2,0,1])
d=a.inner(m,n)
print(d)#1
```

▀ 向量外積（高中數學）

向量外積也是高中空間向量常用計算，過程有點繁瑣，把程式寫好，那隨時可代入求答案。

```
m=(a1,a2,a3)
n=(b1,b2,b3)
```

則向量外積 $m*n=(a2*b3-a3*b2,a3*b1-a1*b3,a1*b2-a2*b1)$ 。例如：

```
m=(1,1,-1)
n=(2,0,1)
```

則求解所需程式如下：

```
import numpy as a
m=a.array([1,1,-1])
n=a.array([2,0,1])
d=a.cross(m,n)
print(d)#1 -3 -2
```

集合的運算

Python 的集合表示如下：

```
a={1,2,3}
b={2,3,5,6}
```

若要求其交集、聯集、差集，則其程式如下：

```
a={1,2,3}#表示法竟然和集合的列舉法相同
b={2,3,4,5}
c={1,2,3,4}
print(a & b)#交集 2,3
print(a|b)#聯集1,2,3,4,5
print(a-b)#差集1
print(a^b)#對稱差集1,4,5
print(1 in a)#True
print(a==b)#False
print(5 not in b)#False
print(a < c)#包含於 True
print(a < b)#False
```

複數的運算（高中數學）

Python 的資料型態有複數，且運算子『+、-、*、/、abs』也適用複數的加減乘除的運算。請鍵入以下程式，並觀察執行結果。

```
a=4+1j#1不能省
b=2-1j
print(a+b)
print(a-b)
```

```
print(a*b)
print(a/b)
print(abs(a))
```

矩陣相乘（高中數學）

例如：

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 12 \\ 6 & -11 \end{pmatrix}$$

計算過程如下：

$$C_{11} = a_{11} \times b_{11} + a_{12} \times b_{21} + a_{13} \times b_{31} = -1 \times 1 + 0 \times 2 + 3 \times -1 = -4$$

$$C_{12} = a_{11} \times b_{12} + a_{12} \times b_{22} + a_{13} \times b_{32} = 12$$

$$C_{21} = a_{21} \times b_{11} + a_{22} \times b_{21} + a_{23} \times b_{31} = 6$$

$$C_{22} = a_{21} \times b_{12} + a_{22} \times b_{22} + a_{23} \times b_{32} = -11$$

以下程式可計算以上兩個矩陣相乘。

```
import numpy as a
m=a.array([[ -1, 0, 3], [ 2, 1, -2]])
n=a.array([[ 1, 0], [ 2, -3], [-1, 4]])
p=m @ n
print(p)
```

繪製函數圖形

國高中數學有很多數學函數，本單元就使用 `matplotlib.pyplot` 繪圖類別來繪製這些函數圖形，尤其是高一數學的指數、對數、三角函數，您只要多畫幾次，那就會更瞭解其內涵。其次，`matplotlib.pyplot` 繪圖類別還要使用 `numpy` 模組，來存放所需要的連續數據。（補充說明：若使用 `Anaconda3`，那以上模組都是預設模組，通通不用再額外安裝）

直線

我們人類繪製直線是使用直尺，但電腦並沒有直尺，那電腦如何繪製直線呢？答案就是要先建立直線方程式，然後再根據直線方程式一點一點密集繪製，這些密集的点，看起來就是直線。例如，設有直線方程式如下：

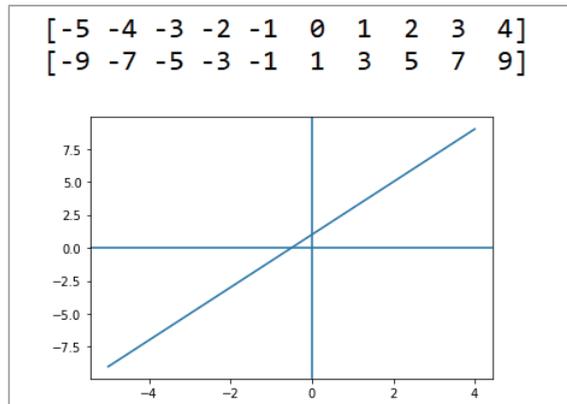
$$y=ax+b$$

那要繪製 x 從 -5 到 5 的直線，程式如下：

```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
x = np.arange(-5, 5, 1) #從-5到5，間隔是1，不含結束點5，
    且間隔可以實數
print(x)
y = 2*x + 1
print(y)
plt.plot(x,y)
plt.axhline(y=0)#x軸
plt.axvline(x=0)#y軸
plt.show()
```

執行結果如下，`arange()` 方法是產生一個 list（一群數字，不是一個，請看上一單元），本例從 -5 到 5，間隔是 1，不含結束點 5，且間隔可以實數。請留意下圖第一、第二列數字是以下程式的輸出結果。

```
x = np.arange(-5, 5, 1) #從-5到5，間隔是1，不含結束點5，且間隔可以實數
print(x)
y = 2*x + 1
print(y)
```



自我練習

請同時繪製兩條直線，分別是 $y=x+6$ 與 $y=-2x+3$ 。

二次曲線

前面 x 僅一次方 $y=ax+b$ ，那圖形是直線，若 x 是兩次 $y=ax^2+bx+c$ 、或三次 $y=ax^3+bx^2+cx+d$ ，那就形成曲線， x 二次會是拋物線，二次方係數為正就凹向上，會有極小值；二次方係數為負就凹向下，會有極大值，請觀察以下圖形。

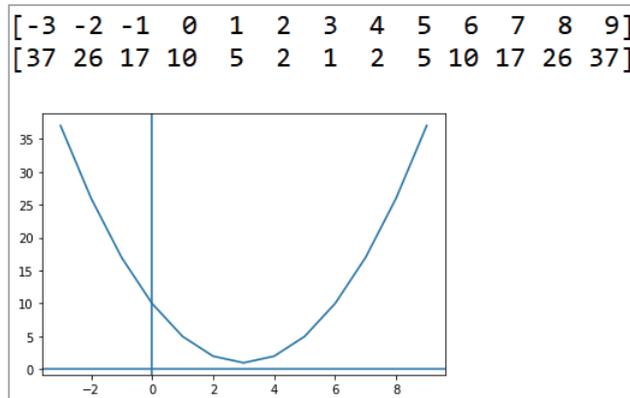
$$y=(x-3)^2+1 \quad (x=3 \text{ 有極小值 } 1)$$

$$=x^2-6x+10$$

繪製以上函數的程式如下：

```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
x = np.arange(-3, 10, 1) #數字是我多次修正的結果，這樣可以表現圖形
最有變化的部分
print(x)
y = x *x-6*x+10
print(y)
plt.plot(x,y)
plt.axhline(y=0)#x軸
plt.axvline(x=0)#y軸
plt.show()
```

以上程式執行結果如下：(x 從 -3 到 10，這是我慢慢觀察圖形，所調整出來的範圍，這樣才能畫出函數最有變化的範圍)



以下 x 是三次方，三次方圖形大部份有兩個臨界點，或稱相對極點。例如：

$$y=2x^3-3x^2-12x+3$$

將以上對 x 微分，得到斜率方程式如下：

$$dy/dx=6x^2-6x-12$$

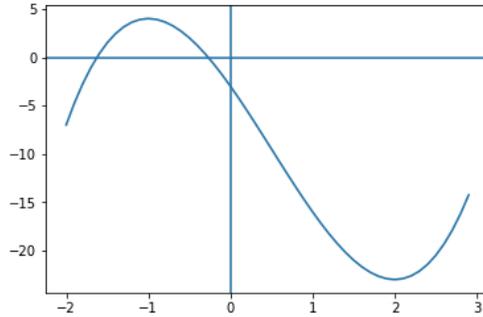
設其斜率為零如下：

$$dy/dx=6x^2-6x-12=0$$

解出 $x=-1$ 或 $x=2$ 時斜率為零，此點即為臨界點，撰寫程式驗證如下：

```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
x = np.arange(-2, 3, 0.1) # 這是我慢慢觀察圖形，所調整出來的範圍
y=2*x**3-3*x**2-12*x-3
plt.plot(x,y)
plt.axhline(y=0) #x軸
plt.axvline(x=0) #y軸
plt.show()
```

執行結果如下：(請留意 $x=-1,2$ 的變化)

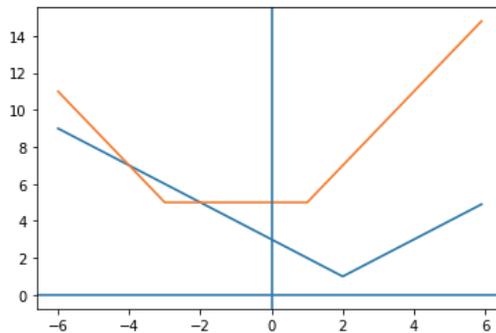


絕對值函數

方程式有一個絕對值，就會有一個轉折點，請看以下程式。

```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
x = np.arange(-6, 6, 0.1)
y1=abs(x-2)+1#一個折點
y2=abs(x+3)+abs(x-1)+1#兩個折點
plt.plot(x,y1)
plt.plot(x,y2)
plt.axhline(y=0)#x軸
plt.axvline(x=0)#y軸
plt.show()
```

以上執行結果如下圖：



自我練習

1. 範例 8b 的自我練習，我們請同學自己在紙上描點繪圖，現在請您用電腦直接繪製函數圖形。
2. 請同時繪出 $y=x+3$ 與 $y=x^2-2$ ，並觀察其交點個數。
3. 請寫一個程式，可以輸入兩個座標，並於螢幕畫出連接此兩點的直線。(請複習範例 4b)
4. 請寫一個程式，可以輸入兩個截距，並畫出此直線。例如，輸入 x 截距是 3， y 截距是 4，然後繪出此直線。
5. 若是高中以上學生，可練習繪出 $y=2^x$ 、 $y=\log_3 x$ 、 $y=\sin(x)$ 、 $y=\sin(2x)$ 、 $y=\sin(x/2)$ 、 $y=\sin(x)+\cos(x)$ 等圖形。